МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А.Самарский
____ мая 2009 г.

# ПРОГРАММА

по курсу: ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И
ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ
по направлению: 511600
факультет: ФНБИК
кафедра: физики и физического материаловедения
курс: 2
семестр: 3
лекции: 34 часа
практические (семинарские) занятия: 34 часа
лабораторные занятия: 68 часов
самостоятельная работа: 2 часа в неделю
экзамен: 3 семестр
зачет: нет
ВСЕГО ЧАСОВ: 136

Программу и задание составил:
д.ф.-м.н., доцент Барабанов Алексей Леонидович

Программа утверждена на заседании кафедры физики и
физического материаловедения ____ мая 2009 года

Заведующий кафедрой В.Г. Вакс
Согласовано:
Заведующий кафедрой общей физики А.Д. Гладун

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

1. *Электромагнитная индукция и индуктивности.* Уравнения Максвелла. Явление электромагнитной индукции. Взаимная индуктивность контуров с токами. Теорема взаимности для коэффициентов индуктивности. Коэффициент самоиндукции замкнутого контура. Катушки индуктивности. Индуктивность длинного соленоида. Установление тока в цепи, содержащей индуктивность. Энергия, сосредоточенная в катушке индуктивности. Плотность энергии магнитного поля. Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Подъёмная сила электромагнита.

2. *Колебания в линейных системах.* Колебательный контур. Свободные затухающие колебания электрического тока в контуре. Коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания и добротность контура. Энергия, сосредоточенная в колебательном контуре. Энергетический смысл добротности. Вынужденные колебания электрического тока под действием внешнего синусоидального напряжения. Амплитудная и фазовая характеристики тока и напряжений. Резонанс. Процесс установления стационарных колебаний.

3. *Переменные токи.* Условие квазистационарности тока. Гармонические (синусоидальные) токи. Представление колебаний электрического тока и напряжений через комплексные величины. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс) элемента цепи переменного тока. Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока. Действующие значения тока и напряжения.

4. *Вынужденные колебания.* Вынужденные электрические колебания в контуре. Связь ширины резонансного пика с добротностью контура. Резонанс напряжений и резонанс токов. Резонансный трансформатор Тесла. Интегрирующие и дифференцирующие аналоговые схемы. Параметрическое возбуждение колебания. Понятие об автоколебаниях. Генератор Ван-дер-Поля. Обратная связь. Условие самовозбуждения. Роль нелинейности.

5. *Модулированные колебания. Шумы.* Вынужденные колебания под действием несинусоидальной (негармонической) силы. Амплитудная и фазовая модуляции. Понятие о спектральном разложении (фурье-разложении). Колебательный контур как спектральный прибор. Частотная характеристика и импульсный отклик. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов. Соотношение неопределённостей. Тепловой и дробовой шумы. Предел чувствительности электрических измерительных приборов.

6. *Распространение сигналов по проводам.* Распространение переменного тока по длинному проводу (кабелю). Уравнения, связывающие ток и напряжение на малом участке кабеля (телеграфные уравнения). Ёмкость, индуктивность, сопротивление и утечка на единицу длины кабеля. Условие распространения сигнала по кабелю без затухания. Условие распространения сигнала с затуханием, но без искажения. Скорость распространения сигнала по кабелю. Волновое сопротивление кабеля.

7. *Уравнения Максвелла в среде.* Электростатика в присутствии диэлектрических сред – плотность связанного заряда, вектор поляризации $\mathbf{P}$, индукция $\mathbf{D}$ электрического поля и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ среды. Магнитостатика в присутствии магнитных сред – плотность

тока намагничивания, вектор намагниченности **I**, напряжённость **H** магнитного поля и магнитная проницаемость $\mu$ среды. Плотность тока смещения (тока связанных зарядов) в диэлектрических средах. Уравнения Максвелла для меняющихся во времени векторов **E**, **D**, **B** и **H** и материальные уравнения (уравнения связи) в изотропной диэлектрической среде.

8. *Энергия электромагнитного поля.* Плотность энергии, плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) и энергия электромагнитного поля в изотропной диэлектрической среде (в частности – в вакууме). Интегральная и дифференциальная формы закона изменения энергии электромагнитного поля. Понятие об импульсе и моменте импульса (угловом моменте) электромагнитного поля. "Энергетические" определения для коэффициентов взаимной индуктивности и коэффициента самоиндукции.

9. *Электромагнитные волны в вакууме и в диэлектрических средах.* Плоская электромагнитная волна в однородной диэлектрической среде (в частности – в вакууме). Частота волны, волновой вектор. Фазовая скорость волны. Коэффициент преломления среды. Поперечность плоской волны. Вектор Пойнтинга для плоской волны. Давление излучения. Опыты Лебедева. Электромагнитный импульс. Линейная, эллиптическая и круговая поляризации плоской электромагнитной волны, распространяющейся в однородной диэлектрической среде.

10. *Отражение и преломление электромагнитных волн.* Отражение и преломление электромагнитных TE- и TM-волн на границе раздела диэлектрических сред. Закон Снеллиуса. Формулы Френеля для коэффициентов отражения и прохождения. Угол Брюстера. Полное внутреннее отражение. Туннельный эффект. Электромагнитные

волны в анизотропных средах. Элементы кристаллооптики.

11. *Электромагнитные волны и проводящие среды.* Проводящие среды – металлы и плазма. Экранировка, дебаевский радиус. Плазменная частота. Электромагнитные волны в проводящих средах. Скин-эффект. Условия отражения электромагнитных волн от проводящих сред.

12. *Классическая теория дисперсии.* Распространение электромагнитных волн в ”газе” осцилляторов. Дисперсия и затухание волн. Нормальная и аномальная дисперсии. Волновой пакет конечной протяженности. Групповая скорость. Формула Рэлея. Длина пространственной когерентности и время когерентности. Дисперсия электромагнитных волн в средах со свободными зарядами (металлы, плазма). Диэлектрическая проницаемость плазмы.

13. *Волноводы.* Бегущие и стоячие электромагнитные волны. Электромагнитные волны в прямоугольных волноводах. Критическая частота волновода.

14. *Резонаторы и квантовые свойства теплового излучения.* Объёмный резонатор. Стоячие электромагнитные волны (моды электромагнитного излучения). Спектральная плотность мод. Аналогия между модами и линейными гармоническими осцилляторами. Квантовая гипотеза Планка. Квантовое выражение для средней энергии моды (осциллятора) при температуре T (распределение Бозе-Эйнштейна). Квантовые формулы для спектральной плотности равновесного теплового излучения в резонаторе и потока излучения, выходящего из резонатора (формулы Планка). Излучение абсолютно чёрного тела. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина. Давление теплового излучения.

15. *Излучение электромагнитных волн.* Нерелятивистские и релятивистские источники электромагнитных волн. Условие дипольного излучения. Сферические волны. Интенсивность и угловое распределение дипольного излучения. Понятие о синхротронном излучении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. [С3] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.3. Электричество. – Москва, Наука, 1996.

2. [КЛО] *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Электричество и магнетизм. Колебания и волны. Волновая оптика. Под. ред. А.С. Кингсепа. – Москва, Физматлит, 2001.

3. [И2] *Иродов И.Е.* Электромагнетизм. Основные законы. – Москва, Лаборатория Базовых Знаний, 2000.

4. [И3] *Иродов И.Е.* Волновые процессы. Основные законы. – Москва, Лаборатория Базовых Знаний, 1999.

5. [Б2] *Парселл Э.* Берклеевский курс физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. – Москва, Наука, 1983.

6. [О2] *Козел С.М., Лейман В.Г., Локшин Г.Р., Овчинкин В.А., Прут Э.В.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика. Под ред. В.А. Овчинкина. – Москва, Изд-во МФТИ, 2000.

7. [О3] *Овчинкин В.А., Раевский А.О., Ципенюк Ю.М.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 3. Атомная и ядерная физика. Строение вещества. Под ред. В.А. Овчинкина. – Москва, Изд-во МФТИ, 2001.

## Дополнительная литература

1. [Ф2] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 2. Вып. 5,6,7. Электричество и магнетизм. Электродинамика. Физика сплошных сред. – Москва, Мир, 1977.

2. [Г] *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва, Физматлит, 1959.

3. [МЧ] *Мешков И.Н., Чириков Б.В.* Электромагнитное поле, в 2-х частях. – Новосибирск, Наука, 1987.

4. [И] *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – Москва, НТЦ ВЛАДИС, 1997.

## ЗАДАНИЕ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
## для студентов 2-го курса на осенний семестр 2009/2010 учебного года

**Пояснение:** Решения задач, входящих в задание, должны быть представлены в отдельной тетради (некоторые из этих задач будут разобраны на семинарах). В задании приводятся, как правило, ссылки на номера задач в сборниках [О2], [О3] и [И] для того, чтобы результаты могли быть (при необходимости) сверены с ответами. При этом [О2-1] – это задачи из 1-й части сборника [О2] по теме "Электричество и магнетизм", [О2-2] – это задачи из 2-й части сборника [О2] по теме "Оптика", а [О3-2] – это задачи из 2-й части сборника [О3] по теме "Строение вещества". Формулировки некоторых задач слегка изменены, в ряде задач поставлены дополнительные вопросы.

**Неделя 1.** Электромагнитная индукция. Коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции.

1-1) [О2-1, 5.27] Коаксиальный кабель состоит из толстого внутреннего провода радиусом $r$ и тонкой внешней оболочки радиусом $R$. Найдите индуктивность коаксиального кабеля на единицу длины.

1-2) [О2-1, 5.30] На один магнитный сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности равны $L_1 = 0.5$ Г и $L_2 = 0.7$ Г соответственно. Чему равна взаимная индуктивность катушек $M$? Рассеянием магнитного поля пренебрегите.

1-3) [О2-1, 5.31] Внутри тонкого соленоида длиной $l = 50$ см с числом витков $N = 10\,000$ и поперёк его оси размещена небольшая плоская катушка с числом витков $n = 40$. По виткам катушки площадью $S = 10$ см$^2$ течёт ток $J = 1$ А. Найдите поток магнитного поля катушки, пронизывающий обмотку соленоида. *Подсказка:* воспользуйтесь теоремой о равенстве взаимных индуктивностей (теоремой взаимности).

1-4) [И, 2.324] Прямоугольная рамка $ABCD$ из тонкого провода расположена в одной плоскости с бесконечным проводом. Ближняя к проводу сторона $AB$, имеющая длину $a$, параллельна проводу и находится от него на расстоянии $l > b$, где $b$ – длина сторон $BC$ и $DA$. По проводу течет ток $J$. Какой заряд $Q$ протечет по рамке, если рамку повернуть на пол-оборота вокруг стороны $AB$ (так что ближней к проводу станет сторона $CD$)? Сечение провода, из которого изготовлена рамка, равно $S$, удельное сопротивление этого провода $\rho$.

1-5) [О2-1, 5.32], [И, 2.357] По прямоугольной рамке $ABCD$ размерами $a \times b$ из тонкого провода течёт ток $J$. Магнитное поле рамки пронизывает полуплоскость, граница которой расположена на расстоянии $l$ от стороны $AB$ длины $a$ (рамка лежит в дополнительной полуплоскости). Найдите магнитный поток, пронизывающий полуплоскость.

1-6) [О2-1, 8.44] Плоский конденсатор помещён между круглыми горизонтальными наконечниками электромагнита так, что обкладки конденсатора параллельны наконечникам (схема представлена на рис. 143 сборника задач [О2]). Между обкладками конденсатора в однородном электрическом поле $E$ на расстоянии $R$ от оси полюсных наконечников неподвижно висит заряженная масленная капля с зарядом $q$. В обмотке включают ток и доводят магнитное поле до постоянной величины $B$. Считая, что за время нарастания магнитного поля смещение капли пренебрежимо мало, найдите скорость $v$ капли и траекторию её движения после включения магнитного поля.

**Неделя 2.** Сверхпроводники в магнитном поле. Энергии и силы в магнитном поле.

2-1) [О2-1, 6.23*] Сверхпроводящий шар радиуса $R$ внесён в постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$. Найдите магнитное поле $\mathbf{B}$ всюду вне шара, считая, что поле $\mathbf{B}_0$ не разрушает сверхпроводимость шара. Найдите также поверхностную плотность сверхпроводящего тока $i$.

2-2) [О2-1, 6.26] В пространстве хаотично распределены сверхпроводящие шарики радиуса $r$. Концентрация $n$ шариков такова, что $nr^3 \ll 1$. Найдите магнитную проницаемость $\mu$ этой среды.

2-3) [О2-1, 7.20] Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция магнитного поля в центре соленоида есть $B = 1000$ Гс. Какой должна быть минимальная начальная скорость $v_0$ шарика для того, чтобы он мог пролететь сквозь соленоид? Диаметр соленоида намного превосходит диаметр шарика. Плотность материала шарика $\rho = 8$ г/см$^3$.

2-4) [О2-1, 7.27] Сверхпроводящее плоское кольцо, по которому течёт ток $J = 1$ А, переносится из удалённой области в область однородного магнитного поля $B_0 = 100$ Гс. Площадь кольца $S = 10$ см$^2$. Нормаль к плоскости кольца составляет угол $\theta_0 = 60^0$ с направлением магнитного поля. Чему равен коэффициент самоиндукции кольца, если в результате переноса ток в кольце обратился в ноль?

2-5) [О2-1, 7.31] В опытах А.Д.Сахарова по получению сверхсильных магнитных полей осуществлялось взрывное сжатие отрезка цилиндрического соленоида, внутри которого создано магнитное поле с индукцией $B_0$. Найдите индукцию поля $B$ в соленоиде в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5 \cdot 10^4$ Гс, начальный внутренний радиус соленоида $R = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r = 0.5$ см. Считайте, что оболочка, окружающая магнитное поле, является идеально проводящей. Найдите также давление $P$, необходимое для получения такого сжатия.

2-6) [О2-1, 7.58] Цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью $\mu$ и площадью поперечного сечения $S$, размещён по оси длинного соленоида таким образом, что один конец стержня находится внутри соленоида, тогда как другой конец – вне соленоида. Магнитное поле (внутри соленоида) вблизи первого конца стержня можно считать однородным и равным $B$, а вблизи второго конца стержня (вне соленоида) – равным нулю. Найдите силу, действующую на стержень. Куда направлена эта сила?

2-7) [О2-1, 7.64] Электромагнит выполнен из железного квадратного бруса сечением $l \times l$, где $l = 5$ см, которому придана форма подковы (схема представлена на рис. 121 сборника задач [О2]): центральная часть изогнута так, что ось бруса представляет собой полуокружность радиуса $r = 7.5$ см; к обоим сторонам этой изогнутой части примыкают параллельные прямые участки, каждый из которых имеет длину $h = 10$ см. Ярмо электромагнита, выполненное из того же бруса, имеет длину $2r + l = 20$ см и примыкает к концам подковы. Подкова имеет обмотку из $N = 200$ витков, по которой течёт ток $J = 2$ А. Магнитная проницаемость железа, из которого выполнен электромагнит, есть $\mu = 200$. Какую силу нужно приложить к ярму, чтобы оторвать его от подковы?

**Неделя 3.** Переходные процессы в электрических цепях. Свободные колебания.

3-1) [O2-1, 9.8] К источнику постоянного тока с ЭДС $\varepsilon$ последовательно присоединены дроссель (катушка) и сопротивление. Полное омическое сопротивление цепи равно $R$. Индуктивность дросселя с железным сердечником равна $L_1$, а без сердечника – $L_2$. Вначале сердечник был вставлен, а по цепи протекал постоянный ток. В момент $t = 0$ сердечник был удалён за время, пренебрежимо малое по сравнению с временем установления тока в цепи. Найдите силу тока $J(t)$ в цепи при $t > 0$.

3-2) [O2-1, 9.16] При отключении цепей постоянного тока, обладающих сопротивлением $R$ и большой индуктивностью $L$ (например, обмоток возбуждения генераторов постоянного тока), эти цепи замыкают на сопротивление $r$ для ограничения перенапряжений (схема представлена на рис. 166 сборника задач [O2]). Найдите, во сколько раз в этом случае максимальное напряжение на зажимах цепи $V_{max}$ будет превышать приложенное постоянное напряжение $V_0$.

3-3) [O2-1, 9.17] В колебательном контуре с индуктивностью $L$ и ёмкостью $C$ происходят незатухающие колебания силы тока $J = J_0 \cos\omega t$, где $\omega^2 = 1/(LC)$. Катушкой индуктивности служит длинная прямая проволочная спираль. Как изменятся частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент $t = 0$ очень быстро (то есть в течение времени, малом по сравнению с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$) растянуть спираль до удвоенной длины? Объясните, почему при этом меняется энергия колебаний.

3-4) [O2-1, 9.27] В колебательный контур с индуктивностью $L$ и конденсатором ёмкостью $C$ дополнительно введены – параллельно индуктивности – сопротивление $R$ и диод, соединённые последовательно (схема представлена на рис. 170 сборника задач [O2]). Сопротивление диода в одном направлении много меньше $R$, а в обратном направлении – бесконечно велико. Вначале конденсатор имеет заряд $q_0$, а контур разомкнут ключом. В некоторый момент ключ замыкают и конденсатор начинает разряжаться через индуктивность (диод на этом этапе блокирует протекание тока параллельно индуктивности). Когда ток разряда достигает максимального значения, ключ вновь размыкают. Какой заряд протечёт через сопротивление $R$?

3-5) [O2-1, 9.39] Груз массой $m$ подвешен на тонкой проволоке длиной $l$ и сопротивлением $R$ в однородном горизонтальном магнитном поле $B$ и совершает малые колебания в плоскости, перпендикулярной полю. При этом проволока всегда остаётся замкнутой накоротко неподвижной внешней цепью. Найдите число колебаний, по прошествии которых амплитуда тока в цепи уменьшится в $e$ раз.

3-6) [O2-1, 9.45] Конденсатор ёмкостью $C$ присоединён к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии $l$ друг от друга. Однородное магнитное поле $B$ горизонтально и перпендикулярно к плоскости шин. Вдоль шин в магнитном поле падает без начальной скорости медный проводник массой $m$ так, что всегда имеется контакт между проводником и шинами. Сопротивлением и индуктивностью проводников, а также трением проводника о шины пренебрегите. Найдите: (1) ускорение проводника, (2) силу тока, заряжающего конденсатор.

3-7) [O2-1, 9.53] Резонансный контур состоит из последовательно соединённых конденсатора ёмкостью $C$, сопротивления $R$ и индуктивности $L$ (схема представлена на рис. 185 сборника задач [O2]). К обкладкам конденсатора присоединён генератор, периодически посылающий импульсы и раскачивающий колебания тока в контуре. Каждый отдельный импульс создаёт на конденсаторе дополнительное напряжение $V$. Промежутки времени между последовательными импульсами в целое число раз $n$ больше периода собственных колебаний. Найдите амплитуду $V_0$ установившихся колебаний напряжения на конденсаторе, считая декремент затухания контура малым.

**Неделя 4.** Переменные токи.

4-1) [O2-1, 10.1] На замкнутом железном сердечнике имеется обмотка из большого числа $n$ витков, присоединённая к источнику синусоидальной ЭДС $\varepsilon$. Вне этой обмотки имеется кольцо, так же (как и витки обмотки) пронизываемое сердечником. Точки $A$, $B$ и $C$ делят это кольцо на три равные части (схема представлена на рис. 187 сборника задач [O2]). Что покажет чувствительный амперметр переменного тока с сопротивлением $r$, если его присоединить к точкам $A$ и $C$ кольца? Рассмотрите два случая: (1) сердечник не пронизывает контур, образованный дугой $AC$ и проводами, ведущими к амперметру; (2) сердечник пронизывает контур, образованный дугой $AC$ и проводами, ведущими к амперметру. Индуктивностью кольца и соединительных проводов пренебрегите.

4-2) [O2-1, 10.3] Для определения мощности $N$, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность и сопротивление катушки неизвестны), иногда применяют метод трёх амперметров. Метод состоит в следующем (схема представлена на рис. 189 сборника задач [O2]). Параллельно катушке включают известное сопротивление $R$. Далее измеряют действующие (эффективные) значения токов: $I_1$ – через катушку, $I_2$ – через сопротивление $R$ и полный ток $I$ через параллельно соединённые катушку и сопротивление $R$ (заметьте, что в общем случае $I_1 + I_2 \neq I\,!$). Как по полученным данным найти $N$?

4-3) Один из самых простых способов включить лампочку, рассчитанную на действующее напряжение $U_{Rm} = 12$ В, в сеть переменного тока со "стандартным" действующим напряжением $U_m = 220$ В, заключается в следующем. Лампочку включают в сеть последовательно с конденсатором. Обсудите, что происходит при этом в цепи, и почему лампочка при этом не перегорает. Вычислите ёмкость $C$ требуемого конденсатора, считая, что мощность лампочки $P = 60$ Вт. Частота переменного тока $\nu = 50$ Гц.

4-4) [О2-1, 10.6] Последовательно к индуктивности $L$ подключён блок, состоящий из параллельно соединённых сопротивления $R$, с одной стороны, и следующих друг за другом 2-й индуктивности $L$ и 2-го сопротивления $R$, с другой стороны (схема представлена на рис. 191 сборника задач [О2]). Цепь подключена к входному переменному напряжению с частотой $\omega$ и амплитудой $V_{\text{вх}}$. С зажимов 2-го сопротивления снимается выходное напряжение с амплитудой $V_{\text{вых}}$. Какому условию должны удовлетворять величины $L$ и $R$ для того, чтобы выходное напряжение было сдвинуто по фазе на $90^0$ относительно входного напряжения? Каким будет при этом отношение амплитуд выходного и входного напряжений?

4-5) [О2-1, 10.60] Найдите импеданс бесконечной цепи, изображённой на рис. 219 сборника задач [О2], как функцию частоты $\omega$ подаваемого напряжения. При каких частотах эта цепь поглощает или не поглощает энергию? Если энергия поглощается, то обсудите, почему это происходит.

4-6) [О2-1, 11.10] Последовательно к сопротивлению $R$ подключён блок, состоящий из двух, параллельно соединённых веток. В 1-й ветке друг за другом следуют сопротивление $R_1$ и индуктивность $L_1$. Во 2-й ветке друг за другом следуют индуктивность $L$ и ёмкость $C$ (схема представлена на рис. 235 сборника задач [О2]). Цепь подключена к источнику переменной ЭДС, меняющейся по закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos^2 \Omega t$. Найдите токи $J_1$ и $J$, протекающие через 1-ю и 2-ю ветки соответственно, если известно, что параметры цепи удовлетворяют условию $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

4-7) [О2-1, 11.11] Последовательно к сопротивлению $R$ подключён блок, состоящий из двух, параллельно соединённых веток. В 1-й ветке друг за другом следуют сопротивление $R_1$ и ёмкость $C_1$. Во 2-й ветке имеются параллельно включённые индуктивность $L$ и ёмкость $C$ (схема представлена на рис. 236 сборника задач [О2]). Цепь подключена к источнику переменной ЭДС, меняющейся по закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos^2 \Omega t$. Найдите токи $J_1$ и $J$, протекающие через 1-ю и 2-ю ветки соответственно, если известно, что параметры цепи удовлетворяют условию $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

**Неделя 5.** Вынужденные колебания. Резонанс.

5-1) [O2-1, 10.16] Колебательный контур с индуктивностью $L = 1$ Г подключён к генератору переменного напряжения. В случае резонанса в контуре под действием внешнего напряжения с амплитудой $V_0 = 200$ В устанавливается переменный ток с амплитудой $J_0 = 20$ А. Найдите по этим данным сопротивление контура $R$ и время затухания $\tau$ (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз) в режиме свободных затухающих колебаний.

5-2) [O2-1, 10.20] Резонансный контур с малым затуханием, состоящий из последовательно соединённых индуктивности $L$, сопротивления $R$ и конденсатора ёмкости $C$, подключён к генератору переменного напряжения. Выходное напряжение снимается с зажимов конденсатора. Установлено, что выходное напряжение максимально при частоте генератора $f_0 = 1.6$ кГц, а при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение $V_1$ при частоте $f_1 = 16$ кГц?

5-3) [O2-1, 10.23] Ёмкостной датчик – это одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств для регистрации малых механических смещений. Обычно ёмкостной датчик представляет собой электрический колебательный контур, состояший из последовательно соединённых индуктивности $L$, сопротивления $R$ и воздушного конденсатора, одна из пластин которого подвижна (схема представлена на рис. 197 сборника задач [O2]).Оцените минимально измеряемое перемещение пластины конденсатора $\Delta d$, если контур настроен в резонанс. Амплитуда переменного напряжения, подаваемого на контур, есть $V = 100$ В, минимально измеряемое изменение амплитуды напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$ мкВ. Добротность контура $Q = 10^3$. Зазор между пластинами конденсатора $d = 1$ мм.

5-4) [О2-1, 10.39] Колебательный контур состоит из последовательно соединённых индуктивности $L_1$, сопротивления $R$ и конденсатора ёмкостью $C$. Вблизи катушки с индуктивностью $L_1$ расположена вторая катушка с индуктивностью $L_2$. Взаимная индуктивность между катушками равна $M$. Какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Примите, что индуктивное сопротивление второй катушки на рассматриваемой частоте значительно больше её активного сопротивления. При каких параметрах задачи резонанс недостижим?

5-5) [О2-1, 10.41] Высокодобротный колебательный контур состоит из последовательно соединённых конденсатора ёмкости $C$ и двух катушек индуктивности $L_1$ и $L_2$ (схема представлена на рис. 203 сборника задач [О2]). Установлено, что после того, как выводы катушки $L_2$ замыкают накоротко, частота собственных колебаний контура не изменяется. Найдите коэффициент $M$ взаимной индуктивности катушек.

5-6) [О2-1, 11.6] Колебательный контур состоит из последовательно соединённых индуктивности $L$, сопротивления $R$ и конденсатора ёмкостью $C$. Контур подключён к источнику переменной ЭДС, частота которой $\omega$ отличается от собственной частоты контура $\omega_0$, причём расстройка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ больше ширины резонансной кривой ($|\Delta\omega| > \delta$). Зажимы генератора накоротко соединены проводом с ключом (схема представлена на рис. 232 сборника задач [О2]). Можно ли "раскачать" колебания в контуре периодическим замыканием и размыканием этого ключа? При какой частоте переключений амплитуда колебаний в контуре будет максимальной?

**Неделя 6.** Спектры. Параметрический резонанс. Автоколебания.

6-1) [O2-1, 11.2] В приёмниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала (то есть сигнал $f(t)$ преобразуется в $f^2(t)$) с последующим усреднением по интервалу $\Delta t$ такому, что $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где $\omega_0$ – радиочастота, а $\Omega$ – частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Найдите, что получится в результате этого преобразования, если на входе имеeется:

1. амплитудно-модулированный сигнал ($m < 1$),

$$f(t) = A(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t,$$

2. фазово-модулированный сигнал ($m \ll 1$),

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t),$$

3. сигнал, который получается из фазово-модулированного сигнала после того, как от него отделяется (отфильтровывается) составляющая с несущей частотой $\omega_0$;

4. сигнал, который получается из фазово-модулированного сигнала после того, как фазу составляющей с несущей частотой $\omega_0$ меняют на $\pi/2$.

6-2) [O2-1, 11.3а] Сигнал $f(t)$ представляет собой бесконечную периодическую последовательность "прямоугольных" импульсов. Пусть $A$ есть "высота" импульсов. Каждый импульс имеет длительность $\tau < T$, где $T$ – период. Функция $f(t)$ является чётной, $f(t) = f(-t)$, то есть начало отсчёта $t = 0$ приходится на середину одного из импульсов (график $f(t)$ представлен на рис. 229а сборника задач [O2]). Найдите спектр этого сигнала.

6-3) [O2-1, 11.3б] Сигнал $f(t)$ представляет собой одиночный "прямоугольный" импульс. Пусть $A$ есть "высота" импульса. Импульс имеет длительность $\tau$. Функция $f(t)$ является чётной, $f(t) = f(-t)$, то есть начало отсчёта $t = 0$ приходится на середину импульса (график $f(t)$ представлен на рис. 229б сборника задач [О2]). Найдите спектр этого сигнала.

6-4) [О2-1, 11.3в] Сигнал $f(t)$ представляет собой фрагмент синусоиды с периодом $T$. Длительность этого фрагмента (цуга волн) равна $\tau$, причём $\tau/T = n$ есть целое число, то есть сигнал содержит $n$ периодов синусоиды, начинаясь с нуля и заканчиваясь нулём (график $f(t)$ представлен на рис. 229в сборника задач [О2]). Найдите спектр этого сигнала.

6-5) [О2-1, 11.26] В прямоугольной контуре $abcd$ в стороны $ab$ и $cd$ введены одинаковые сопротивления $R$, а в стороны $bc$ и $da$ – одинаковые ёмкости $C$. К вершинам $a$ и $c$ подключён источник входного напряжения $V_{\text{ВХ}}(t) = V_0 \cos \omega t$ (схема представлена на рис. 250 сборника задач [О2]). Обе ёмкости одновременно изменяются по закону $C(t) = C_0/(1 + m \cos \Omega t)$, где $C_0$ – постоянная величина, $m \ll 1$, $\Omega \ll \omega$ и $\omega R C_0 \gg 1$. Найдите спектр выходного напряжения $V_{\text{ВЫХ}}$, снимаемого с вершин $b$ и $d$ контура.

6-6) [О2-1, 11.35] Колебательный контур состоит из последовательно соединённых индуктивности $L$, сопротивления $R$ и ёмкости $C$. Индуктивность $L(t)$ меняется, начиная с $t = 0$, по следующему периодическому закону: $L = L_0 + \Delta L$ при $0 < t < \tau_0$, $L = L_0$ при $\tau_0 < t < 4\tau_0$, $L = L_0 + \Delta L$ при $4\tau_0 < t < 5\tau_0$, $L = L_0$ при $5\tau_0 < t < 8\tau_0$ и т. д., то есть период равен $4\tau_0$ (график $L(t)$ представлен на рис. 254 сборника задач [О2]). При каком значении ёмкости колебательного контура возможен параметрический резонанс? Найдите критическое значение $R_0$ активного сопротивления контура такое, что при $R < R_0$ параметрические колебания возбуждаются, тогда как при $R > R_0$ параметрические колебания не возбуждаются. Выполните численные расчёты для значений $L_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ Г, $\Delta L = 4 \cdot 10^{-5}$ Г, $\tau_0 = 10^{-6}$ сек.

6-7) [О2-1, 11.37] В схеме генератора Ван-дер-Поля, изображённого на рис. 255 сборника задач [О2], анодный ток $J_a$ при малых колебаниях в контуре зависит от напряжения $V_c$ на сетке линейным образом: $J_a = SV_c + J_0$, где $S$ и $J_0$ – постоянные величины. Катушка колебательного контура $L$ и катушка связи $L_{\text{св}}$ намотаны на общий магнитный сердечник. Считая величины $L$, $L_{\text{св}}$, $C$ и $S$ заданными, найдите, при каком максимальном значении активного сопротивления $R$ контура возможно возбуждение автоколебаний. Какой будет эффективная добротность контура, если выбрать $R = R_{max}$? Выполните численный расчёт для значений $L = 4 \cdot 10^{-4}$ Г, $L_{\text{св}} = 4 \cdot 10^{-6}$ Г, $C = 10^{-8}$ Ф, $S = 2 \cdot 10^{-3}$ А/В.

**Неделя 7.**

Контрольная работа.

**Неделя 8.**

Разбор контрольной работы. Сдача 1-го задания (недели 1-6).

**Неделя 9.** Уравнения Максвелла. Энергия, импульс и угловой момент электромагнитного поля.

9-1) [О2-1, 8.51] К середине длинного сверпроводящего соленоида радиуса $r_0 = 2$ см, который может свободно вращаться вокруг своей оси, прикреплёно плоское кольцо из изолирующего материала, на которое (вне соленоида) нанесены заряды, суммарное значение которых равно $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл (схема представлена на рис. 147 сборника задач [О2]). Соленоид замкнут накоротко, и в нём циркулирует ток, который создаёт в центре соленоида магнитное поле с индукцией $B_0 = 10^4$ Гс. После нагрева соленоида ток в нём прекращается, а вся система приходит во вращение. Найдите угловой момент (момент импульса) $L$ вращающейся системы. Как появление этого углового момента согласуется с законом сохранения углового момента?

9-2) [О2-1, 12.3] Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из $N$ витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и магнитной проницаемостью $\mu$. Длина соленоида равна $l$, радиус $R$. По обмотке соленоида течёт переменный ток $J = J_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислите магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида. Найдите отношение максимальных значений этих энергий для $R = 5$ см, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ и частоты $\nu = 100$ Гц.

9-3) [O2-1, 12.5*] Плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиуса $R$, заряжен и отключён от источника электричества. Между центрами дисков проскакивает искра (происходит пробой конденсатора). Считая разряд квазистационарным и мгновенное значение силы тока равным $J$, вычислите наряжённость магнитного поля $H$ внутри конденсатора в зависимости от расстояния $r$ от его оси. Краевыми эффектами пренебрегите.

9-4) [O2-1, 12.9, 12.32*] Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых дисков радиуса $a$, расположенных на расстоянии $d$ друг от друга, и заполнен диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon$. Конденсатор заряжают до напряжения $V_0$ и отсоединяют от батареи. После этого пластины конденсатора соединяют длинным цилиндрическим проводом, обладающим сопротивлением $R$ и проходящим вне конденсатора, так что конденсатор начинает разряжаться. Найдите $J(t)$, то есть зависимость тока, текущего по проводу, от времени. Вычислите (для мгновенного значения тока $J$) поток электромагнитной энергии, втекающей внутрь провода через его боковую поверхность (докажите, что величина этой втекающей энергии точно равна выделяющемуся джоулевому теплу). Покажите, пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, что точно такой же поток электромагнитной энергии вытекает из конденсатора (через его боковую поверхность). Найдите полную электромагнитную энергию W, которая вытечет через боковую поверхность конденсатора за всё время его разрядки, и покажите, что она равна начальной энергии конденсатора.

9-5) [O2-1, 12.10] Плотностью тока смещения называют величину $(1/4\pi)\partial D/\partial t$ (при использовании гауссовых единиц). Найдите плотность тока смещения внутри пустого плоского конденсатора, пластины которого раздвигают со скоростью $u$, в двух случаях: (1) заряды на пластинах остаются постоянными; (2) разность потенциалов $V$ между пластинами остаётся постоянной. Расстояние $d$ между пластинами во всех случаях мало по сравнению с размерами пластин. Что изменится, если пластины конденсатора не расходятся, а сближаются?

9-6) [O2-1, 12.19] Обкладками плоского воздушного конденсатора являются диски, расположенные на расстоянии $d$ друг от друга. Внутри конденсатора находится проволочная прямоугольная рамка, одна сторона которой, длиной $2b$, совпадает с осью симметрии конденсатора (схема представлена на рис. 257 сборника задач [O2]). Две другие стороны рамки, параллельные пластинам конденсатора, имеют длину $2a$ каждая. К обкладкам конденсатора приложено переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. Найдите силу тока $J$ в рамке в предположении, что её омическое сопротивление $R$ велико по сравнению с индуктивным.

9-7) [O2-1, 12.29] Имеется цилиндрический пучок нерелятивистских электронов с кинетической энергией $W$. Концентрация электронов в пучке $n$. Радиус поперечного сечения пучка равен $R$. Найдите величину и направление вектора Пойнтинга внутри и вне пучка. Сравните полный поток электромагнитной энергии вдоль пучка с полным потоком механической энергии электронов, а также поток электромагнитного импульса вдоль пучка с потоком механического импульса электронов.

**Неделя 10.** Отражение и преломление электромагнтных волн.

10-1) [И, 3.244] В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны, одна – вдоль оси $x$, другая – вдоль оси $y$: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t)$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \cos(ky - \omega t + \varphi)$, где вектор $\mathbf{E}_0$ направлен вдоль оси $z$. Найдите среднее значение (направление и величину) плотности потока энергии в точках плоскости $x = y$ (воспользуйтесь записью вектора Пойнтинга в гауссовой системе единиц). Может ли быть, что в некоторых точках средний поток равен нулю? Если да, то при каких условиях?

10-2) [O2-2, 2.2] Электромагнитная волна (которая, в частности, может быть светом) падает нормально из вакуума на плоскую поверхность однородной диэлектрической среды. Найдите коэффициенты отражения $R$ и прохождения $T$ волны, исходя из условий, связывающих электрические и магнитные поля по обе стороны плоскости, которая разделяет вакуум и диэлектрик (эти условия называют граничными). Как $R$ и $T$ связаны с показателем преломления $n$ диэлектрической среды? Найдите $R$ и $T$ для воды, $n = 1.33$, и стекла, $n = 1.5$.

10-3) [O2-2, 2.8, 2.11] Естественный (неполяризованный) свет падает наклонно на стекло с показателем преломления $n = 1.5$. При каком угле падения (угле между направлением распространения света и нормалью к поверхности стекла) отражённый свет будет полностью поляризованным (этот угол называется углом Брюстера)? Вычислите коэффициенты отражения $R$ и прохождения $T$ естественного света при этом угле падения. Найдите степень поляризации $\Delta = (I_\perp - I_\parallel)/(I_\perp + I_\parallel)$ преломлённого света для того же угла падения естественного света (здесь $I_\perp$ – интенсивность прошедшего света, поляризованного в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, а $I_\parallel$ – интенсивность прошедшего света, поляризованного в плоскости падения).

10-4) [O2-2, 2.17] Имеются две параллельные полупрозрачные плоскости. Электромагнитное излучение падает на эти плоскости нормально (угол падения равен нулю). Коэффициенты отражения и пропускания первой плоскости равны $\rho_1$ и $\tau_1$, а второй плоскости – $\rho_2$ и $\tau_2$. Степень монохроматичности падающего излучения невелика, так что интерференции нет, а есть сложение интенсивностей отражённых и прошедших волн. Найдите коэффициенты отражения $\rho$ и преломления $\tau$ электромагнитного излучения от указанной системы двух плоскостей.

10-5) [О2-2, 2.19] Стопа Столетова состоит из плоскопараллельных стеклянных пластинок (показатель преломления стекла $n = 1.5$). На неё под углом Брюстера падает свет, поляризованный в плоскости падения. Найдите коэффициенты отражения $\rho$ и пропускания $\tau$ стопы в зависимости от числа $N$ пластинок. Нарисуйте графики $\rho(N)$ и $\tau(N)$.

10-6) [И, 4.196] Узкий пучок естественного (неполяризованного) света падает под углом Брюстера на стопу Столетова, состоящую из $N$ толстых стеклянных пластин (показатель преломления стекла $n = 1.5$). Найдите: (1) степень поляризации $P$ прошедшего пучка в зависимости от $N$; (2) численные значения $P$ при $N = 1, 2, 5$ и 10.

**Неделя 11.** Проводники, плазма, скин-эффект.

11-1) [О2-1, 6.37] На расстоянии $h = 1$ см от плоской поверхности сверхпроводника расположен длинный тонкий провод, параллельный поверхности. По проводу течёт ток $J = 10$ А. Найдите распределение токов, текущих по поверхности сверхпроводника. Найдите также силу $f$, действующую на единицу длины провода. Является ли эта сила притягивающей или отталкивающей?

11-2) Двухпроводная линия образована двумя параллельными металлическими лентами ширины $a$, находящимися на расстоянии $d$ ($d \ll a$) друг от друга. Вычислите ёмкость $C' = \Delta C/\Delta x$ и индуктивность $L' = \Delta L/\Delta x$ единицы длины линии. Найдите фазовую скорость распространения волн по этой линии. Найдите также волновое сопротивление линии.

11-3) [И, 3.260] В коаксиальном кабеле центральный провод имеет радиус $a = 0.25$ мм, а внешняя оплётка – радиус $bb = 3$ мм. Вычислите ёмкость единицы длины кабеля $C' = \Delta C/\Delta x$. Вычислите индуктивность единицы длины кабеля $L' = \Delta L/\Delta x$, воспользовавшись энергетическим методом, в двух приближениях: (1) ток равномерно распределён по сечению центрального провода (частота тока мала, поэтому скин-эффект несуществен); (2) ток распределён по поверхности центрального провода (частота тока так велика, что толщина скин-слоя мала по сравнению с радиусом $a$). Найдите фазовую скорость распространения волн по коаксиальному кабелю. Отличается ли эта скорость от скорости света и, если да, то на сколько процентов? Найдите волновое сопротивление (Ом) кабеля.

11-4) [О2-1, 12.55] Плоский конденсатор заполнен плазмой со средней концентрацией электронов и ионов $n_0$ и температурой $T$. Расстояние между пластинами конденсатора равно $a$, разность потенциалов между пластинами есть $V$. Пренебрегая током через плазму и считая $eV \ll kT$, определите пространственную зависимость потенциала в плазме между пластинами конденсатора.

11-5) [О2-1, 12.57] По длинному плазменному цилиндру диаметром $2R = 10$ см течёт ток $J = 10^5$ А, сосредоточенный в поверхностном слое. Давление в плазме $P = 10^5$ Н/м$^2$. Найдите давление $P_0$ на боковую поверхность плазменного цилиндра, возникающее под действием тока. Сжимается плазма или расширяется? Найдите величину тока, необходимую для того, чтобы радиальные силы уравновесились.

11-6) [О2-2, 2.43] Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau = 0.5$ мсек энергию $\varepsilon = 1$ Дж в виде почти параллельного пучка с сечением $S = 1$ см$^2$. Рабочая длина волны лазера $\lambda = 6943\mathring{A}$. Найдите: (1) давление (атм) несфокусированного пучка света на полностью отражающую площадку, перпендикулярную пучку; (2) давление (атм) света на полностью отражающую полощадку, перпендикулярную пучку, при максимально возможно концентрации светового пучка (то есть при фокусировке пучка в область с площадью поперечного сечения порядка $\lambda^2$); (3) напряжённость электрического поля $E$ в области максимально возможной концентрации светового пучка (дотягивает ли эта напряжённость до значений $10^8 - 10^9$ В/см напряженности электрического поля в атомах?). Считайте, что энергия, излучаемая лазером, равномерно распределена по длине импульса.

**Неделя 12.** Дисперсия электромагнитных волн.

12-1) [O2-2, 10.5] Вычислите групповую скорость $u$ волн, распространяющихся в средах с различными законами дисперсии ($v$ – фазовая скорость): (1) $v = a$ (здесь и далее $a$ – постоянная величина) – недиспергирующая среда, например, звуковые волны в воздухе; (2) $v = a\sqrt{\lambda}$ – волны на поверхности воды, вызываемые силой тяжести (гравитационные волны); (3) $v = a/\sqrt{\lambda}$ – волны на поверхности воды, вызываемые поверхностным натяжением (капиллярные волны); (4) $v = a/\lambda$ – поперечные волны, бегущие по длинному стержню; (5) $v = \sqrt{c^2 + a^2\lambda^2}$ – электромагнитные волны в ионосфере ($c$ – скорость света в вакууме, $\lambda$ – длина волны в среде; (6) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - a^2c^2}$ – электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ ($c$ – скорость света в вакууме, постоянная $a$ зависит в данном случае от размеров и формы поперечного сечения волновода).

12-2) [O2-2, 10.8] Показатель преломления $n$ рентгеновского излучения с частотой $\omega$ в среде определяется формулой $n^2 = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, где $\omega_0$ – постоянная. Найдите предельный угол падения $\alpha$ рентгеновского излучения из воздуха на среду, за которым имеет место явление полного внутреннего отражения. Выразите групповую скорость $u$ рентгеновского излучения в среде через скорость $c$ распространения излучения в вакууме и угол $\alpha$.

12-3) [O2-2, 10.18*] Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой $\nu = 10$ МГц равен $n = 0.90$. Найдите концентрацию $N$ электронов в ионосфере, а также фазовую $v$ и групповую $u$ скорости распространения радиоволн с указанной частотой в ионосфере.

12-4) [О2-2, 10.21] Импульсное излучение пульсара на частоте $\nu_1 = 80$ МГц достигает Земли на $\Delta t = 7$ сек позже, чем соответствующий импульс на частоте $\nu_2 = 2000$ МГц. Оцените расстояние $L$ (в световых годах) до пульсара, приняв среднюю концентрацию электронов в межзвёздном пространстве равной $N = 0.05$ см$^{-3}$.

12-5) [О2-2, 10.24] Плёнка серебра прозрачна для ультрафиолета, начиная с энергии $\varepsilon = 5$ эВ. Найдите число свободных электронов на атом Ag. Относительная атомная масса серебра равна $A = 108$, плотность серебра $\rho = 10.5$ г/см$^3$.

12-6) [О2-2, 10.38] Линейно поляризованный импульс квазимонохроматического излучения проходит через электрооптическую ячейку Поккельса длиной $l = 10$ см. Показатель преломления ячейки увеличивают по закону $n(t) = n_0 + \alpha t$. Как изменится длительность импульса и его средняя частота после прохождения через ячейку, если $\alpha = 3 \cdot 10^8$ сек$^{-1}$?

**Неделя 13.** Волноводы.

13-1) [О2-1, 12.25, 12.27] Постоянный ток $J$ течёт по обмотке длинной катушки радиусом $r_2$ с плотностью витков $n$ [см$^{-1}$], проходит через резистор сопротивлением $R$ и возвращается по прямому проводу радиуса $r_1$ вдоль оси катушки (схема представлена на рис. 258 сборника задач [О2]). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найдите продольную $S_z$ (ось $z$ – это ось катушки) и поперечную $S_\varphi$ составляющие вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от её торцов. Вычислите поток электромагнитной энергии через сечение катушки и покажите, что эта энергия точно равна джоулеву теплу, выделяющемуся на резисторе. Обсудите, что изменится, если катушку с проходящим вдоль её оси проводом заменить на коаксиальный кабель. Обсудите также, каким будет направление потока электромагнитной энергии, если по коаксиальному кабелю пустить не постоянный, а переменный ток.

13-2) [O2-1, 12.46] Поперечное сечение волновода с металлическими стенками имеет форму квадрата со стороной $a = 5$ см. Оси $x$ и $y$ направлены вдоль сторон квадрата, а ось $z$ – вдоль волновода. В волноводе возбуждаются колебания электрического поля $E_x = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$ с частотой $\nu_0 = 2998$ МГц (схема представлена на рис. 261 сборника задач [O2]). При какой минимальной частоте амплитудной модуляции $\nu_{min}$ в волноводе возникнет бегущая волна? Чему равна фазовая скорость волны при частоте модуляции $\nu = 3$ МГц?

13-3) [O2-1, 12.50] В волноводе квадратного сечения (сторона квадрата равна $a$) с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением возбуждена бегущая электромагнитная TE-волна с минимальной частотой при заданном волновом числе $k_z$. Ось $z$ направлена вдоль волновода, вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси $x$, амплитуда поля равна $E_0$. Найдите вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(x, y, z, t)$ как функцию координат и времени.

13-4) [O2-1, 12.52] Мощный СВЧ генератор через волновод питает нагрузку, посылая в волновод мощность $N_0 = 100$ кВт. Часть этой мощности поглощается в нагрузке ($N_\text{н} = 75$ кВт, а часть отражается. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отражённой волн, распространяющихся во встречных направлениях. Найдите коэффициент стоячей волны в волноводе, то есть отношение максимальной напряжённости поля (в пучности) к минимальной (в узле).

13-5) [O2-1, 12.54*] Через волновод прямоугольного сечения со сторонами $a$ и $b$ ($a < b$) распространяется волна низшего типа (то есть $H_{01}$), возбуждаемая генератором микроволнового излучения с частотой $\omega_0$. Вследствие ионизации воздуха, оставшегося в волноводе после его вакуумирования, в нём образуется плазма. В результате длина волны в волноводе удваивается. Определите по этим условиям концентрацию электронов в образовавшейся плазме.

**Неделя 14.** Резонаторы.

14-1) [И, 3.120] Имеется плоский конденсатор шириной $a$, длиной $b$, расстояние между пластинами равно $d$ ($d \ll a, b$). Сбоку к этому конденсатору (вдоль стороны $b$) приладили цилиндр длиной $b$, радиусом $r$ с прорезью по всей длине шириной $d$ ($d \ll r \ll b$) так, что цилиндр соединяет друг с другом верхнюю и нижнюю пластины конденсатора. Рассматривая получившуюся систему как резонатор, плоская часть которого является конденсатором, а цилиндрическая – индуктивностью, найдите его собственную частоту $\omega_0$.

14-2) [О2-1, 12.43*] Отрезок коаксиального кабеля длиной $l = 14$ м подключён ко входу усилителя с очень высоким входным сопростивлением. Другой конец кабеля замкнут накоротко. Межпроводное пространство кабеля заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 2$), который характеризуется малой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1} \simeq 9 \cdot 10^3$ ед. СГСЭ. Найдите наименьшую резонансную частоту $\nu_{min}$ и добротность $Q$ контура, эквивалентного отрезку данного кабеля, считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

14-3) [О2-1, 12.44*] Торцы отрезка волновода сечением $a \times b = 10 \times 22$ мм$^2$ и длиной $l = 100$ мм запаяны. Волновод заполнен диэлектрической средой ($\varepsilon = 2$), обладающей слабой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-7}$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1} \simeq 900$ ед. СГСЭ. Найдите добротность $Q$ полученного СВЧ резонатора для самой низкой возможной резонансной частоты $\nu_{min}$, считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

14-4) [О2-1, 12.47] В резонаторе, который представляет собой кубик со стороной $a$ с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением, возбуждена основная мода электромагнитных колебаний. Электрическое поле с амплитудой $E_0$ направлено по оси $z$. Найдите вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(x, y, z, t)$ как функцию координат и времени.

14-5) [О2-1, 12.49] Прямоугольный сверхпроводящий резонатор высотой $h = 3$ см имеет в горизонтальном сечении форму квадрата со стороной $a = 10$ см. Изнутри резонатор покрыт сверхпроводником, критическое магнитное поле $H_c$ которого в условиях опыта равно 1 кЭ. Во избежания пробоя напряжённость $E$ электрического поля всюду должна быть не больше $E_0 = 30$ кВ/см. Измеренная на низшей частоте добротность резонатора оказалась равной $Q = 10^6$. Какую мощность $N$ можно подводить непрерывно к резонатору на этой частоте, чтобы поддерживать колебания с максимально допустимой амплитудой?

14-6) В резонаторе, представляющем собой прямоугольный параллелепипед с ребрами $L_x$, $L_y$ и $L_z$ (вдоль осей $x$, $y$ и $z$, соответственно), $x$-составляющие электрического и магнитного полей определяются формулами:

$$E_x(x, y, z, t) = E_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t),$$

$$B_x(x, y, z, t) = B_{0x} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t).$$

Запишите по аналогии составляющие $E_y$, $E_z$, $B_y$ и $B_z$. Удостоверьтесь в том, что граничные условия для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ выполняются на всех стенках резонатора. Докажите, что постоянные векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ могут быть выбраны так, что поля $\mathbf{E}$ м $\mathbf{B}$ всюду внутри параллелепипеда удовлетворяют всем четырем уравнениям Максвелла (воспользуйтесь их записью в гауссовой системе единиц). Выразите вектор $\mathbf{B}_0$ через векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{E}_0$. Как связаны между собой волновой вектор $\mathbf{k}$ и частота волны $\omega$?

Вычислите, сколько независимых мод $\Delta N$ электромагнитного поля в рассмотренном резонаторе приходится на малый интервал частот от $\omega$ до $\omega + \Delta\omega$. Модой называется решение уравнений Максвелла, отвечающее бегущей или стоячей волне, которая характеризуется определенным волновым вектором и определенной поляризацией.

**Неделя 15.** Квантовая теория теплового излучения.

15-1) [ОЗ-2, 1.22] Расстояние от Земли до космического рентгеновского источника равно $L = 1.3 \cdot 10^4$ световых лет. Спектр источника соответствует спектру излучения абсолютно чёрного тела. Максимум излучения наблюдается на длине волны $\lambda_{max} = 2\mathring{A}$, а суммарная по спектру (полная) плотность потока на Земле есть $j = 10^{-11}$ Вт/м$^2$. Оцените диаметр источника.

15-2) [ОЗ-2, 1.29*] В пустом пространстве находится железная пластина, одна поверхность которой абсолютно "чёрная", а другая – идеально отражающая. В начальный момент пластина покоится, и её температура равна $T = 10^3$ К. До какой максимальной скорости $v_{max}$ может разогнаться пластина при остывании? В соответствии с законом Дюлонга и Пти примите, что теплоёмкость одного моля атомов пластины равна $3R$, где $R$ – универсальная газовая постоянная.

15-3) [ОЗ-2, 1.32] Оцените, до какой максимальной температуры может разогреться в космосе шарик из металличекого урана-238 массой $m = 4$ г за счёт естественной $\alpha$ радиоактивности, считая, что продукты распада ядер не покидают его. Плотность урана $\rho = 18.7$ г/см$^3$, период полураспада $T^{\alpha}_{1/2} = 10^9$ лет, при $\alpha$ распаде ядра $^{238}$U выделяется энергия $\varepsilon_\alpha = 4.2$ МэВ. Влиянием солнечного излучения и космических лучей пренебрегите.

15-4) [ОЗ-2, 1.38] Температура нити вакуумной лампы накаливания, включённой в сеть с напряжением $U_0 = 220$ В, равна $T = 1500$ К. Напряжение в сети упало на 5%. Оцените, на сколько процентов уменьшится освещённость, создаваемая лампой. Считайте, что сопротивление $R$ нити не зависит от температуры.

15-5) [ОЗ-2, 1.44] Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \le \omega_0$ и $A = 0$

при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствие других источников излучения нагревается за счёт внутреннего источника энергии до температуры $T$. Найдите эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно чёрной поверхностью в тех же условиях равновесная температура есть $T' = 300$ К. Граничная частота соответствует температуре $\theta = \hbar\omega_0/k_B = 300$ К.

15-6) [О3-2, 1.63] Оцените давление электромагнитного излучения в центре ядерной урановой бомбы в момент её взрыва, предполагая, что излучение – равновесное, а температура внутри бомбы $T = 10$ кэВ. Каково отношение этого давления к газокинетическому давлению испарившегося вещества? Плотность урана $\rho = 18.7$ г/см$^3$.

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

## ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Потоком векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхность $S$ называют следующую величину:

$$\int\limits_S \mathbf{A}(\mathbf{r})d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\Delta\boldsymbol{\sigma}_i.$$

Здесь $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ есть малый направленный элемент поверхности $S$, включающий в себя точку $\mathbf{r}_i$; вектор $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ нормален к поверхности $S$ в точке $\mathbf{r}_i$, а его модуль $|\Delta\boldsymbol{\sigma}_i| = \Delta\sigma_i$ равен площади элемента поверхности.

Линейным интегралом векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ вдоль контура $C$ называют следующую величину:

$$\int\limits_C \mathbf{A}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\Delta\mathbf{l}_i.$$

Здесь $\Delta\mathbf{l}_i$ есть малый направленный элемент контура $C$, включающий в себя точку $\mathbf{r}_i$; вектор $\Delta\mathbf{l}_i$ касателен к контуру $C$ в точке $\mathbf{r}_i$, а его модуль $|\Delta\mathbf{l}_i| = \Delta l_i$ равен длине элемента контура.

Циркуляцией $\Gamma$ векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ вдоль замкнутого контура $C$ называют линейный интеграл:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}.$$

## ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называют следующую скалярную функцию:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\limits_{\Delta S}\mathbf{A}d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta V}.$$

Здесь замкнутая поверхность $\Delta S$ охватывает малый объем $\Delta V$, который включает в себя точку $\mathbf{r}$. Теорема Гаусса–Остроградского:

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r})d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})dV,$$

где $S$ есть замкнутая поверхность, охватывающая объем $V$.

Ротором векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называют такую векторную функцию $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, что:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\oint\limits_{\Delta C}\mathbf{A}d\mathbf{l}}{\Delta\sigma}.$$

Здесь замкнутый контур $\Delta C$ ограничивает малую поверхность $\Delta\sigma$, которая включает в себя точку $\mathbf{r}$, а $\mathbf{n}$ есть единичный вектор нормали к поверхности $\Delta\sigma$. Теорема Стокса:

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})d\boldsymbol{\sigma},$$

где $C$ есть замкнутый контур, ограничивающий поверхность $S$.

Дивергенция и ротор векторного поля

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$$

вычисляются по формулам:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r})] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x(\mathbf{r}) & A_y(\mathbf{r}) & A_z(\mathbf{r}) \end{vmatrix}.$$

## ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Пусть в точках $\mathbf{r}_i$ покоятся заряды $q_i$ $(i = 1, 2\ldots)$. Потенциальная энергия пробного заряда $q$, находящегося в точке $\mathbf{r}$, есть:

$$U = k_e \sum_i \frac{q\,q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Сила $\mathbf{F}$ (сила Кулона), действующая на пробный заряд, есть:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = k_e \sum_i \frac{q\,q_i\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}.$$

Потенциал электрического поля в точке $\mathbf{r}$, создаваемого покоящимися зарядами, есть:

$$\varphi = \frac{U}{q} = k_e \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Напряженность электрического поля есть:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = k_e \sum_i \frac{q_i\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}.$$

Линейный интеграл напряженности постоянного электрического поля от точки 1 до точки 2 не зависит от контура интегрирования и определяется убылью потенциала:

$$\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} = \varphi(1) - \varphi(2).$$

Потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого зарядом, распределенным непрерывно с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, определяются формулами:

$$\varphi(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'.$$

## ЕДИНИЦЫ ГС ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В гауссовой системе (ГС) заряды измеряют в единицах СГСЭ$_q$. Заряд 1 СГСЭ$_q$ по определению таков, что

$$\frac{(1\ \text{СГСЭ}_q)^2}{(1\ \text{см})^2} = 1\ \text{дин},$$

поэтому:

$$k_e^{\text{ГС}} = 1.$$

Единица измерения электрического потенциала есть:

$$1\ \text{СГСЭ}_V \equiv \frac{1\ \text{эрг}}{1\ \text{СГСЭ}_q} = \frac{1\ \text{СГСЭ}_q}{1\ \text{см}} = (1\ \text{дин})^{1/2}.$$

Единица измерения напряженности электрического поля есть 1 СГСЭ$_V$/см.

## ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Закон Гаусса для постоянного электрического поля в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{E} d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi k_e \sum_i q_i.$$

Закон Гаусса для постоянного электрического поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k_e \rho(\mathbf{r}).$$

Закон о циркуляции постоянного электрического поля в интегральной форме:

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Закон о циркуляции постоянного электрического поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}).$$

## ЁМКОСТИ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Ёмкость уединенного проводника с зарядом $q$ и потенциалом $\varphi$ ($\varphi \to 0$ при $r \to \infty$) есть:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Единица ГС измерения ёмкости – это 1 см=1 СГСЭ$_q$/1 СГСЭ$_V$, а единица СИ – 1 Ф=1 Кл/1 В$\simeq 9{\cdot}10^{11}$ см.

Плотность энергии электрического поля есть:

$$w_e = \frac{E^2}{8\pi k_e}.$$

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Поле электрического диполя:

$$\varphi(\mathbf{r}) = k_e \frac{\mathbf{pr}}{r^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{pn}) - \mathbf{p}}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = q\mathbf{l}.$$

Энергия диполя и момент сил, действующих на диполь, в электрическом поле:

$$U_e = -\mathbf{pE}, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}].$$

Сила, действующая на диполь в постоянном неоднородном электрическом поле:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{pE}) = (\mathbf{p}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}.$$

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Индуцированный электрический дипольный момент атома или молекулы:

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha \mathbf{E}}{k_e}, \quad \alpha^{\text{СИ}} = 4\pi\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{cases} \alpha \mathbf{E}, & \text{ГС}, \\ \varepsilon_0\, \alpha^{\text{СИ}}\, \mathbf{E}, & \text{СИ}, \end{cases}$$

где $\alpha$ – поляризуемость системы.

Поляризация (плотность электрического дипольного момента) вещества:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\langle\mathbf{p}\rangle,$$

где $n(\mathbf{r})$ – концентрация диполей, а $\langle\mathbf{p}\rangle$ – средний дипольный момент атомов и молекул в физически малом объёме вблизи точки $\mathbf{r}$.

Плотность связанных зарядов:

$$\rho_{\text{связ}}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}).$$

Связь между поляризацией и напряженностью электрического поля:

$$\mathbf{P} = \frac{\chi\mathbf{E}}{k_e}, \quad \chi^{\text{си}} = 4\pi\chi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{cases} \chi\mathbf{E}, & \text{ГС}, \\ \varepsilon_0\,\chi^{\text{си}}\,\mathbf{E}, & \text{СИ}, \end{cases}$$

где $\chi$ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Индукция электрического поля:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{k_e} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{D}^{\text{си}} = \frac{\mathbf{D}}{4\pi},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}}, & \text{ГС}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D}^{\text{си}} = \rho_{\text{своб}}, & \text{СИ}, \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon\mathbf{E}}{k_e}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \chi^{\text{си}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, & \text{ГС}, \\ \mathbf{D}^{\text{си}} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, & \text{СИ}, \end{cases}$$

где $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

## ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ

В ГС единица измерения силы тока есть 1 СГСЭ$_q$/сек, а в СИ – 1 А$\simeq 3\cdot 10^9$ СГСЭ$_q$/сек. Уравнение непрерывности электрического тока имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где $R$ есть сопротивление. В СИ единица измерения сопротивления есть 1 Ом = 1 В/1 А, а в ГС – 1 сек/см $\simeq 9 \cdot 10^{11}$ Ом. Сопротивление однородного проводника длины $l$ и поперечного сечения $S$ есть:

$$R = \rho\,\frac{l}{S}\,,$$

где $\rho$ – удельное сопротивление.

Локальная форма закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где $\sigma = 1/\rho$ есть удельная электрическая проводимость. В СИ величина, обратная 1 Ом, есть 1 См (Симменс). В СИ единица измерения удельной электрической проводимости есть 1 См/м, а в ГС – 1 сек$^{-1} \simeq (1/9) \cdot 10^{-9}$ См/м.

Локальная форма обобщенного закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

где $\mathbf{E}^*$ есть напряженность сторонних сил. ЭДС, действующая на участке цепи $1 \to 2$, равна

$$\varepsilon_{12} = \int\limits_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи $1 \to 2$:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Первое правило Кирхгофа для постоянных токов:

$$\sum_i I_i = 0.$$

Второе правило Кихгофа для постоянных токов:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k.$$

Закон Джоуля–Ленца для неоднородного участка цепи:

$$\frac{dQ}{dt} = RI^2.$$

Локальная форма закона Джоуля–Ленца:

$$\frac{dQ_{\text{уд}}}{dt} = \rho j^2 = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Пусть по замкнутым тонким проводам $C_1$ и $C_2$ текут постоянные токи $I_1$ и $I_2$. Сила $d\mathbf{F}_1$, действующая на элемент $d\mathbf{l}_1$ 1-го провода, находящегося в точке $\mathbf{r}_1$, со стороны всего второго провода, есть:

$$d\mathbf{F}_1 = k_m I_1 I_2 \oint\limits_{C_2} \frac{[d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\,]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

В частности, сила $dF_1$ (сила Ампера), действующая на элемент $dl_1$ бесконечно длинного прямого 1-го провода со стороны всего бесконечно длинного 2-го провода, параллельного 1-му, равна

$$\frac{dF_1}{dl_1} = k_m \frac{2I_1 I_2}{\rho},$$

где $\rho$ – расстояние между проводами.

## ЕДИНИЦЫ СИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В СИ единица измерения заряда 1 Кл по определению такова, что

$$\frac{2\,(1\text{ Кл/сек})^2}{1\text{ м}} = \frac{2{\cdot}10^{-7}\text{ Н}}{1\text{ м}},$$

поэтому:

$$k_m^{\text{СИ}} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{\text{Н}}{\text{А}^2},$$

где 1 А=1 Кл/1 сек.

Единицы измерения заряда 1 СГСЭ$_q$ и 1 Кл связаны следующим образом:

$$1\text{ Кл} = 2.9979\ldots\cdot 10^9\text{ СГСЭ}_q \simeq 3\cdot 10^9\text{ СГСЭ}_q.$$

Соответственно:

$$k_e^{\text{СИ}} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2},$$

$$k_m^{\text{ГС}} = \frac{1}{c^2}, \quad c = 299\,792\,458\ \frac{\text{м}}{\text{сек}} \simeq 3\cdot 10^{10}\ \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

В СИ единица измерения электрического потенциала есть:

$$1\text{ В} = \frac{1\text{ Дж}}{1\text{ Кл}} \simeq \frac{1}{300}\text{ СГСЭ}_V.$$

Единица измерения напряженности электрического поля есть 1 В/м.

В любой системе единиц справедливо:

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2.$$

## ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Индукция $\mathbf{B}$ магнитного поля в точке $\mathbf{r}$, создаваемого постоянным током $I_2$, текущим по замкнутому контуру $C_2$, равна (закон Био–Савара–Лапласа):

$$\mathbf{B} = k_B I_2 \oint\limits_{C_2} \frac{[d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Элемент $d\mathbf{l}$ постоянного тока $I$ в точке $\mathbf{r}$ испытывает действие силы $d\mathbf{F}$ (силы Ампера) со стороны магнитного поля:

$$d\mathbf{F} = k_F I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

При этом:

$$k_F k_B \equiv k_m.$$

Заряд $q$, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, в точке $\mathbf{r}$ испытывает действие силы $\mathbf{F}$ (силы Лоренца) со стороны магнитного поля:

$$\mathbf{F} = k_F q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

## ЕДИНИЦЫ ГС И СИ ИЗМЕРЕНИЯ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

В ГС принимают:

$$k_F^{\text{ГС}} = k_B^{\text{ГС}} = \frac{1}{c}.$$

В ГС единица измерения индукции магнитного поля,

$$1\ \text{Гс} = \frac{1\ \text{дин}}{1\ \text{СГСЭ}_q} = 1\ \frac{\text{СГСЭ}_V}{\text{см}},$$

совпадает с единицей измерения напряженности электрического поля.

В СИ принимают:

$$k_F^{\text{СИ}} = 1, \quad k_B^{\text{СИ}} = k_m^{\text{СИ}}.$$

В СИ единица измерения индукции магнитного поля,

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}} = 10^4 \text{ Гс},$$

отличается размерностью от единицы измерения напряженности электрического поля.

## ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Закон Гаусса для постоянного магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint\limits_S \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Закон Гаусса для постоянного магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.$$

Закон о циркуляции магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint\limits_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = 4\pi k_B \sum_i I_i.$$

Закон о циркуляции магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_B \, \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Эффект Холла состоит в появлении разности потенциалов $\Delta\varphi$ между краями пластины ширины $l$, помещенной в поперечное магнитное поле $B$, при протекании по пластине тока плотности $j$. При этом:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{k_F}{nq}\right) jBl,$$

где $n$ – концентрация носителей свободных зарядов в пластине, а $q$ – заряд одного носителя.

## МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Индукция магнитного поля магнитного диполя:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{k_B}{k_F}\,\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m}\mathbf{n}) - \mathbf{m}}{r^3}, \quad \mathbf{m} = \frac{k_F}{2}\int [\mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})]\,d^3r.$$

Магнитный дипольный момент плоского контура с током:

$$\mathbf{m} = k_F I\,\mathbf{S} = \begin{cases} \dfrac{I\,\mathbf{S}}{c}, & \text{ГС},\\ I\,\mathbf{S}, & \text{СИ}. \end{cases}$$

Энергия диполя и момент сил, действующих на диполь, в магнитном поле:

$$U_m = -\mathbf{m}\mathbf{B}, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{m}\times\mathbf{B}].$$

Сила, действующая на магнитный диполь в постоянном неоднородном магнитном поле:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\mathbf{B}) = (\mathbf{m}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}.$$

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Намагниченность (плотность магнитного момента) вещества:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\langle\mathbf{m}\rangle,$$

где $n(\mathbf{r})$ – концентрация магнитных диполей, а $\langle\mathbf{m}\rangle$ – средний магнитный момент атомов и молекул в физически малом объёме вблизи точки $\mathbf{r}$.

Плотность тока намагничивания:

$$\mathbf{j}_{\text{намаг}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_F} \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}).$$

Напряженность магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{k_F \mathbf{B}}{k_B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad \mathbf{H}^{\text{СИ}} = \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{k_B}{k_F} \left( \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \right),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi k_F \mathbf{j}_{\text{своб}} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{своб}}\,, & \text{ГС}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^{\text{СИ}} = \mathbf{j}_{\text{своб}}\,, & \text{СИ}. \end{array} \right.$$

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\mathbf{M} = æ\mathbf{H} = æ^{\text{СИ}} \mathbf{H}^{\text{СИ}}, \quad æ^{\text{СИ}} = 4\pi æ,$$

где æ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \frac{k_B \mu \mathbf{H}}{k_F} = \left\{ \begin{array}{ll} \mu \mathbf{H}, & \text{ГС}, \\ \mu_0 \mu \mathbf{H}^{\text{СИ}}, & \text{СИ}, \end{array} \right. \qquad \mu = 1 + 4\pi æ = 1 + æ^{\text{СИ}},$$

где $\mu$ – магнитная проницаемость вещества.

Для диамагнетков $æ < 0$ и $\mu < 1$, а для парамагнетиков $æ > 0$ и $\mu > 1$, но в обоих этих случаях $|æ| \ll 1$, так что $\mu$ мало отличается от единицы.

Небольшие образцы сверхпроводников 1-го рода полностью выталкивают из себя магнитное поле (это явление называют эффектом Мейснера), то есть в этих образцах $\mathbf{B} = 0$. Соответственно для таких образцов справедливо: $\mu = 0$ (сверхпроводники 1-го рода иногда называют "абсолютными диамагнетиками").

Ферромагнетики в не очень сильных внешних магнитных полях ведут себя так, что в хорошем приближении $\mu \gg 1$.

Когда внешнее магнитное поле достигает определённого значения, намагниченность $\mathbf{M}$ ферромагнитного образца выходит на насыщение. Соответственно индукция $\mathbf{B}$ перестаёт быть прямо пропорциональной напряжённости $\mathbf{H}$ магнитного поля в ферромагнетике.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -k_F \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int\limits_S \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma}.$$

В СИ единица измерения магнитного потока ($\Phi$) – Вебер (Вб):

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ сек},$$

а в ГС – Максвелл (Мкс):

$$1 \text{ Мкс} = 1 \text{ Гс} \cdot 1 \text{ см}^2 = 1 \text{ СГСЭ}_q = 1 \text{ СГСЭ}_V \cdot 1 \text{ см} = 10^{-8} \text{ Вб}.$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -k_F \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_e \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi k_B \mathbf{j} + \dfrac{k_B}{k_e} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Явный вид уравнений Максвелла в ГС ($k_e = 1$, $k_F = k_B = 1/c$):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Явный вид уравнений Максвелла в СИ ($k_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}, k_F = 1, k_B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$):

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля:

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

## ИНДУКТИВНОСТИ

Взаимные индуктивности двух контуров:

$$\Phi_1 = k_F L_{12} I_2 = \begin{cases} L_{12} I_2, & \text{СИ}, \\ \dfrac{L_{12} I_2}{c}, & \text{ГС}, \end{cases} \qquad \Phi_2 = k_F L_{21} I_1 = \begin{cases} L_{21} I_1, & \text{СИ}, \\ \dfrac{L_{21} I_1}{c}, & \text{ГС}. \end{cases}$$

Теорема взаимности:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Единица СИ измерения индуктивностей – это 1 Гн = 1 Вб/1 А, а единица ГС – 1 см, при этом 1 Гн = $10^9$ см.

Коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура:

$$\Phi = k_F L I = \begin{cases} LI, & \text{СИ}, \\ \dfrac{LI}{c}, & \text{ГС}. \end{cases}$$

ЭДС самоиндукции контура:

$$\varepsilon_i = -k_F \frac{d\Phi}{dt} = -k_F^2 L \frac{dI}{dt} = \begin{cases} -L\dfrac{dI}{dt}, & \text{СИ}, \\ -\dfrac{L}{c^2}\dfrac{dI}{dt}, & \text{ГС}. \end{cases}$$

Индуктивность длинного соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью $\mu$:

$$L = \frac{4\pi k_B \mu n^2 S l}{k_F} = \frac{4\pi k_B \mu N^2 S}{k_F l} = \begin{cases} \mu_0 \mu n^2 S l = \dfrac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}, & \text{СИ}, \\ 4\pi \mu n^2 S l = \dfrac{4\pi \mu N^2 S}{l}, & \text{ГС}, \end{cases}$$

где $S$ – поперечное сечение соленоида, $l$ – длина соленоида, $N$ – полное число витков, $n = N/l$ – плотность витков.

Магнитная энергия контура с индуктивностью $L$ и с током $I$:

$$W_m = \frac{k_F^2 L I^2}{2} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{LI^2}{2}, & \text{СИ} \\ \dfrac{LI^2}{2c^2}, & \text{ГС} \end{array} \right\} = \frac{k_F I \Phi}{2}.$$

Плотность энергии магнитного поля:

$$w_m = \frac{k_F B^2}{8\pi k_B \mu} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{B^2}{2\mu_0 \mu}, & \text{СИ} \\ \dfrac{B^2}{8\pi \mu}, & \text{ГС} \end{array} \right\} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{BH^{\text{си}}}{2}.$$

Магнитная энергия взаимодействия двух контуров с токами $I_1$ и $I_2$ при взаимной индуктивности $L_{12} = L_{21}$:

$$W_m^{12} = k_F^2 L_{12} I_1 I_2.$$

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР (СИ)

Частота колебаний в контуре без затухания (формула Томсона):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Частота колебаний в контуре со слабым затуханием:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{R}{2L} \ll \omega_0,$$

где $\beta = 1/\tau$ – коэффициент (декремент) затухания, а $\tau$ – время затухания.

Логарифмический декремент затухания (слабого):

$$\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \ll 1, \quad \lambda = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}\,,$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний, а $N$ – число полных колебаний за время затухания.

Добротность контура со слабым затуханием:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N \gg 1, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Полная энергия затухающих колебаний контура:

$$W(t) = \frac{q_0^2}{2C}\,e^{-2\beta t} = \frac{LI_0^2}{2}\,e^{-2\beta t},$$

где $q_0$ – амплитуда начальных колебаний заряда на обкладках конденсатора, $I_0$ – амплитуда начальных колебаний тока в контуре. Энергетический смысл добротности:

$$Q = 2\pi\frac{W}{|\Delta_T W|}\,,$$

где $|\Delta_T W|$ – убыль энергии контура за период.

При подключении колебательного контура к источнику переменного напряжения $U(t) = U_0 \sin\omega t$ в контуре устанавливаются колебания заряда (на обкладках конденсатора):

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

и тока:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = I_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad I_0 = \omega q_0.$$

Фаза $\varphi$ определяется уравнениями:

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,, \;\; \sin\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,.$$

Зависимость (резонансная) квадрата амплитуды колебаний тока от частоты $\omega$:

$$I_0^2 = \frac{\omega^2 U_0^2 / L^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}\,.$$

Ширина $\Gamma$ резонансной кривой на половине высоты:

$$\Gamma = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\omega_0} = \frac{1}{Q}\,.$$

## ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА (СИ)

Квазистационарное приближение:

$$L \ll cT = \frac{c}{\nu}\,,$$

где $L$ – характерная длина цепи, а $\nu$ – частота тока.

Ток через элемент цепи:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \hat{I}(t), \quad \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Напряжение на элементе цепи:

$$U(t) = \operatorname{Re} \hat{U}(t), \quad \hat{U}(t) = Z\,\hat{I}(t),$$

где $Z$ – импеданс элемента цепи. Импедансы сопротивления, индуктивности и ёмкости:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}\,.$$

Правила вычисления импедансов при последовательном и параллельном соединении элементов 1 и 2:

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.$$

Средняя мощность, выделяемая на участке цепи переменного тока:

$$\langle P\rangle = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi = U_m I_m \cos\varphi,$$

где $U_m = U_0/\sqrt{2}$ и $I_m = I_0/\sqrt{2}$ – действующие значения напряжения и тока, а $\varphi$ – разность фаз между напряжением и током.

## МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Разложение периодической функции $f(t) = f(t+T)$ в ряд Фурье ($\omega = 2\pi/T$):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t),$$

где

$$\omega_n = n\,\omega, \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_n t)\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega_n t)\,dt.$$

Другие формы записи этого же ряда Фурье:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n\, e^{i\omega_n t},$$

где $c_n$ и $\varphi_n$ связаны с $a_n$ и $b_n$ следующим образом:

$$a_n = c_n \cos\varphi_n, \quad b_n = -c_n \sin\varphi_n, \quad n > 0,$$

а коэффициенты $\tilde{c}_n$ выражаются через $c_n$ и $\varphi_n$ так:

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} \dfrac{c_n\, e^{i\varphi_n}}{2}\,, & n > 0, \\ a_0\,, & n = 0, \\ \dfrac{c_{-n}\, e^{-i\varphi_{-n}}}{2}\,, & n < 0. \end{cases}$$

Разложение квадратично интегрируемой функции $f(t)$ в интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \,,$$

где $C(\omega)$ – фурье-образ функции $f(t)$:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \,.$$

При этом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega \,.$$

Если $f(t) = f^*(t)$, то $C^*(\omega) = C(-\omega)$. В этом случае интегралу Фурье может быть придана такая форма:

$$f(t) = 2\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\, C(\omega)\, \cos(\omega t)\, d\omega - 2\int_0^{\infty} \mathrm{Im}\, C(\omega)\, \sin(\omega t)\, d\omega \,.$$

Соотношение неопределённостей:

$$\Delta\omega\, \Delta t \simeq 2\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu\, \Delta t \simeq 1.$$

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ПРОВОДАМ

Напряжение $U(x,t)$ между парой проводов ($x$ – координата вдоль проводов, $t$ – время) и ток $I(x,t)$ в одном из проводов (в другом проводе ему соответствует противоположный ток $-I(x,t)$) связаны между собой следующими уравнениями ("телеграфными"):

$$\begin{cases} k_F^2 L' \dfrac{\partial I}{\partial t} + \dfrac{\partial U}{\partial x} + R' I = 0, \\ \dfrac{\partial I}{\partial x} + C' \dfrac{\partial U}{\partial t} + G' U = 0, \end{cases}$$

где $L'$, $R'$, $C'$, $G'$ – это индуктивность, сопротивление, ёмкость и проводимость (изоляции проводов друг от друга) единицы длины рассматриваемой пары проводов.

В приближении $R' = 0$ (идеальные проводники) и $G' = 0$ (идеальная изоляция), ток (как и напряжение) удовлетворяет волновому уравнению следующего вида:

$$\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0, \quad v = \frac{1}{k_F\sqrt{L'C'}}.$$

Здесь $v$ – фазовая скорость распространения волны по проводу. Напряжение между проводами $U(x,t)$ прямо пропорционально току $I(x,t)$:

$$U(x,t) = R_w\, I(x,t), \quad R_w = k_F\sqrt{\frac{L'}{C'}}\,.$$

Величину $R_w$ называют волновым сопротивлением рассматриваемой пары проводов (кабеля).

В общем случае уравнение для тока имеет вид:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} + (k_F^2 G'L' + R'C')\frac{\partial I}{\partial t} + G'R'I = 0.$$

Это уравнение имеет решение в форме:

$$I(x,t) = e^{-\alpha x} f(x - vt),$$

где $f(x)$ – произвольная функция, если выполняется условие:

$$k_F^2 G'L' = R'C'.$$

При этом: $\alpha = \sqrt{G'R'}$.

Индуктивность единицы длины коаксиального кабеля с радиусом $a$ внутреннего провода и радиусом $b$ внешней оплётки в пренебрежении распределением тока по сечению внутреннего провода есть:

$$L' = \frac{2k_B \ln(b/a)}{k_F} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi}\,, & \text{СИ}, \\ 2\ln(b/a), & \text{ГС}. \end{cases}$$

Ёмкость единицы длины этого же кабеля:

$$C' = \frac{1}{2k_e \ln(b/a)} = \begin{cases} \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}\,, & \text{СИ}, \\ \dfrac{1}{2\ln(b/a)}\,, & \text{ГС}. \end{cases}$$

Фазовая скорость распространения волн по такому кабелю (в указанном выше приближении) равна:

$$v = \frac{1}{k_F\sqrt{L'C'}} = \sqrt{\frac{k_e}{k_F k_B}} = c\,.$$

Волновое сопротивление такого кабеля есть:

$$R_w = k_F\sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{k_e k_F k_B}\,\ln\frac{b}{a} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\ln\dfrac{b}{a}\,, & \text{СИ}, \\ \dfrac{1}{c}\ln\dfrac{b}{a}\,, & \text{ГС}, \end{cases}$$

где

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 30\ \text{Ом}.$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

В диэлектрической среде (обладающей также определёнными магнитными свойствами) плотность электрического заряда удобно представить в виде суммы плотностей свободных и связанных зарядов:

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_{\text{своб}}(\mathbf{r},t) + \rho_{\text{связ}}(\mathbf{r},t), \quad \rho_{\text{связ}}(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r},t),$$

где $\mathbf{P}$ – поляризация среды. Аналогичным образом плотность тока удобно представить в виде суммы плотностей свободных токов, токов намагниченности и токов связанных зарядов:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}_{\text{намаг}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}_{\text{связ}}(\mathbf{r},t),$$

где

$$\mathbf{j}_{\text{намаг}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k_F}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{j}_{\text{связ}}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,.$$

Здесь $\mathbf{M}$ – намагниченность среды.

Уравнения Максвелла в диэлектрической среде:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -k_F\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}}\,, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi k_F \mathbf{j}_{\text{своб}} + k_F\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,, \end{cases}$$

где $k_F = 1/c$ в ГС. В СИ, помимо $k_F = 1$, следует также учесть определения: $\mathbf{D}^{\text{СИ}} = \mathbf{D}/4\pi$ и $\mathbf{H}^{\text{СИ}} = \mathbf{H}/4\pi$. Поэтому:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{div}\,\mathbf{D}^{\text{СИ}} = \rho_{\text{своб}}\,, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}^{\text{СИ}} = \mathbf{j}_{\text{своб}} + \dfrac{\partial \mathbf{D}^{\text{СИ}}}{\partial t}\,. \end{cases}$$

Материальные уравнения (уравнения связи):

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon \mathbf{E}}{k_e} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, & \text{ГС}, \\ \mathbf{D}^{\text{СИ}} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, & \text{СИ}, \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \frac{k_B \mu \mathbf{H}}{k_F} = \begin{cases} \mu \mathbf{H}, & \text{ГС}, \\ \mu_0 \mu \mathbf{H}^{\text{СИ}}, & \text{СИ}, \end{cases}$$

где $\varepsilon$ и $\mu$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. В вакууме: $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

## ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ И ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для произвольного объёма $V$ диэлектрической среды (в частности, в вакууме) справедливо:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{HB}}{8\pi}\,dV = -\int\limits_V (\mathbf{j}_{\text{своб}}\mathbf{E})dV - \oint\limits_S \frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]}{4\pi k_F}\,d\boldsymbol{\sigma},$$

где $S$ – замкнутая поверхность, ограничивающая объём $V$. Поскольку первое слагаемое в правой части есть мощность тепловыделения (по закону Джоуля–Ленца), то

$$w_f = \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{HB}}{8\pi} = \frac{\mathbf{ED}^{\text{СИ}} + \mathbf{H}^{\text{СИ}}\mathbf{B}}{2}$$

есть плотность энергии электромагнитного поля, а

$$\mathbf{S}_f = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi k_F} = \begin{cases} \dfrac{c\,[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi}, & \text{ГС}, \\ [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{\text{СИ}}], & \text{СИ}, \end{cases}$$

есть плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга).

Энергетический способ вычисления индуктивности $L$ контура:

$$\frac{k_F^2 L I^2}{2} = \int \frac{\mathbf{HB}}{8\pi}\, dV \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{I^2} \int \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi k_F k_B \mu}\, dV.$$

Здесь $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля, которое формируется током $I$, текущем по контуру (очевидно, что $\mathbf{B}^2 \sim I^2$).

Энергетический способ вычисления взаимной индуктивности $L_{12} = L_{21}$ двух контуров:

$$k_F^2 L_{12} I_1 I_2 = \int \frac{k_F(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)}{4\pi k_B \mu}\, dV \quad \Rightarrow \quad L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int \frac{(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)}{4\pi k_F k_B \mu}\, dV,$$

где, очевидно, $(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) \sim I_1 I_2$.