МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А.Самарский
____ мая 2010 г.

ПРОГРАММА

по курсу: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
по направлению: 511600
факультет: ФНБИК
кафедра: физики и физического материаловедения
курс: 3
семестр: 5
лекции: 34 часа
практические (семинарские) занятия: 34 часа
лабораторные занятия: нет
самостоятельная работа: 2 часа в неделю
экзамен: 5 семестр
зачет: нет
ВСЕГО ЧАСОВ: 68

Программу и задание составили:
академик Беляев Спартак Тимофеевич
к.ф.-м.н., доц. Толоконников Сергей Владимирович

Программа утверждена на заседании кафедры физики и физического материаловедения ____ мая 2010 года

Заведующий кафедрой В.Г. Вакс

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
Часть 1

1. *Введение.* Общая структура классической физики; два принципиально различных объекта с различным описанием: координаты, импульс, движение по траектории для частиц; амплитуды и фазы с возможностью интерференции для электромагнитных волн. Эксперименты, размывающие границы: фотоэффект, эффект Комптона; кванты света, постоянная Планка как коэффициент пропорциональности между частотой и энергией кванта; дифракция электронов.

   Принципиальные вопросы, необъясняемые классической физикой: излучение черного тела; планетарная модель атома (почему атомы идентичны и устойчивы, линии в их спектрах излучения).

   Пути сближения в описании волн и частиц; геометрическая оптика - движение волновых пакетов в неоднородной среде с фазой, зависящей от координат и времени, групповая скорость, соотношение неопределенности. Уравнения Гамильтона-Якоби, аналогия действия с фазой в геометрической оптике.

   Необходимость волнового описания в квантовой механике (де Бройль). Уравнение Шредингера для свободного движения (из волнового уравнения с заменой скорости света на фазовую скорость для частицы).

2. *Математический аппарат квантовой механики.* Пространство состояний (Гильбертово), его размерность. Вектора состояний (в формализме Дирака). Базис. Операторы, их собственные вектора и собственные значения, дискретный и непрерывный спектры. Унитарные преобразования. Принципы физического описания (амплитуда,

плотность, поток вероятности). Средние значения физических величин. Стационарные состояния. Соотношение неопределенности для некоммутирующих динамических переменных. Уравнения Гайзенберга для операторов.

3. *Уравнение Шредингера и его свойства.* Требования к решениям. Ток и уравнение непрерывности. Стационарные состояния, дискретный и непрерывный спектр энергий. Интегралы движения и симметрии. Простые одномерные задачи. Прямоугольная яма. Прохождение через барьер. Дельта-функционный потенциал. Общие свойства спектра (дискретность, непрерывность, наличие связанного состояния) для одномерного движения. Уравнение Шредингера в импульсном представлении. Приложения: когда есть уровень в мелкой яме (зависимость от размерности пространства); решение в однородном поле, асимптотика по обе стороны от точки поворота.

4. *Линейный гармонический осциллятор.* Решение дифференциального уравнения. Связь с классическим описанием для высоких состояний. Введение операторов рождения и уничтожения "квантов"и нахождение векторов состояний в формализме чисел заполнения. Когерентные состояния осциллятора.

5. *Связь с классической механикой и квазиклассическое приближение.* Уравнения Эренфеста. Вид волновой функции в квазиклассике, нарушение условий ее применимости вблизи точек поворота. Граничные условия (аналитическое продолжение через комплексную плоскость). Финитное движение и правило квантования Бора. Плотность квантовых состояний в фазовом пространстве. Инфинитное движение и прохождение через потенциальный барьер.

6. *Оператор момента.* Коммутационные соотношения для

компонент орбитального момента. Общие следствия коммутационных соотношений. Собственные векторы и собственные значения операторов момента. Орбитальный момент в координитном представлении. Сферические функции и их свойства. Связь с гармоническими полиномами. Групповые свойства. Приводимые и неприводимые представления (на примере гармонических полиномов и сферических функций). Сложение моментов, коэффициенты Клебша-Гордона.

7. *Спин электрона.* Оператор спина. Матрицы Паули и их свойства. Спиновая волновая функция. Спиновая матрица плотности. Оператор магнитного момента электрона. Уравнение Шредингера во внешнем электромагнитном поле (уравнение Паули). Градиентная инвариантность. Движение электронов в однородном магнитном поле. Уровни Ландау. Спин в переменном магнитном поле. Плотность тока в магнитном поле.

8. *Движение в центрально-симметричном поле.* Свободное движение. Разложение плоской волны по сферическим функциям. Разделение переменных в задаче двух тел. Радиальное уравнение, асимптотика и нули волновой функции. Сферическая яма, случай одного мелкого уровня, модель дейтона. Пространственно-изотропный осциллятор.

9. *Водородоподобный атом* Энергетический спектр, волновые функции, случайное вырождение. Зависимость результатов от величины заряда и масс. Импульсное представление. Позитроний, мезоатомы.

10. *Стационарная теория возмущений.* Дискретный спектр (метод с проекционными операторами). Энергия основного состояния атома гелия. Случай вырождения. Эффект Штарка в водороде. Случай двух близких уровней.

11. *Нестационарная теория возмущений.* Переходы в дискретном спектре под действием ограниченного по времени возмущения. Внезапные и адиабатические возмущения. Периодические по времени возмущения. Случай близкий к резонансу. Переходы в непрерывный спектр.

12. *Переходы в непрерывном спектре под действием постоянного возмущения.* Сечение рассеяния. Функция Грина для одночастичного уравнения Шредингера, выбор полюсов для задачи рассеяния. Связь амплитуды рассеяния с точной волновой функцией. Амплитуда в Борновском приближении, критерий применимости для медленных и быстрых частиц. Рассеяние электрона на атоме, предел медленных и быстрых частиц.

13. *Системы тождественных частиц.* Неразличимость одинаковых частиц в квантовой механике. Следствия для симметрии волновых функций. Статистика Бозе и Ферми. Принцип Паули. Волновые функции в представлении чисел заполнения. Операторы рождения и уничтожения. Их правила коммутации для Бозе и Ферми частиц. Роль спиновой части волновых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Москва, "Наука 1989.

2. А. С. Давыдов. Квантовая механика. Москва, "Наука 1973.

3. П. А. Дирак. Принципы квантовой механики. Москва, "Наука 1979.

4. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. Задачи по квантовой механике. Москва, "Наука 1981.

Дополнительная литература

1. А. Мессиа. Квантовая механика. Том 1. Москва, "Наука 1978. Том 2. Москва, "Наука 1979.

2. Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. Москва, "Наука 1976.

3. Л. Шифф. Квантовая механика. Москва, ИЛ, 1967.

4. З. Флюгге. Задачи по квантовой механике. Том 1, Москва, "Мир 1974. Том 2, Москва, "Мир 1975.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Состояние

$$|\psi\rangle\,,\quad \psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle\,;$$

$$c(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\psi\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}\psi(\vec{r})d^3r\,.$$

Физическая величина (наблюдаемая)

$$A \to \widehat{A}\ \ (\widehat{A}^{+} = \widehat{A})\,;\quad \widehat{A}|A_n\rangle = A_n|A_n\rangle\,,$$

$$\langle A_n \mid A_{n'}\rangle = \delta_{nn'}\,;\quad W(A = A_n) = |\langle A_n|\psi\rangle|^2\,.$$

Коммутатор

$$[\widehat{A},\widehat{B}] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}\,.$$

Зависимость от времени

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\ = \widehat{H}\mid\psi\rangle\,;\quad \frac{d\widehat{A}}{dt} = \frac{\partial\widehat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\widehat{H},\widehat{A}]\,.$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0\,,$$

$$\rho = |\psi|^2\,, \;\; \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)\,.$$

Осциллятор

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,; \;\; \widehat{a}^+\widehat{a}|n\rangle = n|n\rangle\,;$$

$$\widehat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,; \;\; \widehat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,;$$

$$\psi_n(Q) = \langle Q|n\rangle = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(Q) e^{-Q^2/2}\,,$$

$H_n(Q)$ — полином Эрмита.

Орбитальный момент

$$\widehat{\vec{M}} = [\widehat{\vec{r}}\widehat{\vec{p}}] = \hbar\widehat{\vec{l}};$$

$$[\widehat{l}_\alpha\,,\,\widehat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\widehat{l}_\gamma\,; \;\; [\widehat{l}_\alpha\,,\,\widehat{x}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\widehat{x}_\gamma\,; \;\; [\widehat{l}_\alpha\,,\,\widehat{p}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\widehat{p}_\gamma\,;$$

$$\widehat{\vec{l}}^{\,2}|l,m\rangle = l(l{+}1)|l,m\rangle\,; \;\; \widehat{l}_z|l\,,\,m\rangle = m|l\,,\,m\rangle\,; \;\; m = 0\,,\,\pm 1\,,\,\ldots\,,\,\pm l\,;$$

$$\widehat{l}_\pm|l,m\rangle \equiv (\widehat{l}_x \pm i\widehat{l}_y)|l\,,\,m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|l\,,\,m \pm 1\rangle\,;$$

$$Y_{l,m}(\theta\,,\,\varphi) \equiv \langle\vec{n}|l,m\rangle\,.$$

Атом водорода: атомная единица длины $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$, атомная единица импульса $\frac{\hbar}{a} = \frac{me^2}{\hbar}$, атомная единица скорости $\frac{e^2}{\hbar}$, атомная единица энергии $\frac{me^4}{\hbar^2}$;

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}\,; \;\; \psi_{nlm} = R_{nl}(\rho)Y_{lm}(\theta\,,\,\varphi)\,;$$

$$R_{nl}(\rho) = \rho^l e^{-\rho/n} \times (\text{полином от}\,\rho\,\text{степени}\,n - l - 1)\,;$$

$$\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\rho}\,,\quad \rho=\frac{r}{a}\,.$$

Стационарная теория возмущений

$$E_n^{(1)}=V_{nn}\,;\quad E_n^{(2)}=\sum_{k\neq n}\frac{\mid V_{nk}\mid^2}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}}\qquad \text{— невырожденный случай;}$$

$$|\psi_n^{(1)}\rangle=\sum_{k\neq n}\frac{V_{kn}}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}}|\psi_k^{(0)}\rangle\,;$$

$$det\parallel V_{\alpha\beta}-E^{(1)}\delta_{\alpha\beta}\parallel=0\quad \text{— вырожденный случай.}$$

Нестационарная теория возмущений

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}\{|V_{\nu n_0}|^2\rho(E_\nu)\}_{E_\nu=E_{n_0}}\,,\ \rho=\frac{d\nu}{dE}\quad \text{— "золотое правило"Ферми.}$$

Квазиклассическое приближение

$$\psi\approx\frac{c}{\sqrt{p}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p dx}$$

$$\oint p dx=2\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\quad \text{— правило квантования Бора–Зоммерфельда}\,,$$

$$\Delta\Gamma=2\pi\hbar\,,$$

$$D=\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b|p|dx\right)\quad \text{— проницаемость барьера.}$$

Спин электрона

$$\hat{\vec{s}}=\frac{1}{2}\hat{\vec{\sigma}}\,;$$

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\,;\ \ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\,;\ \ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\ \text{— матрицы Паули;}$$

$$\chi_{1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv\alpha=|+\rangle\to s_z=\frac{1}{2}\,;\quad \chi_{-1/2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\equiv\beta=|-\rangle\to s_z=-\frac{1}{2}\,.$$

Уравнение Паули

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\widehat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A})^2\psi - \frac{e\hbar}{2mc}(\vec{\mathcal{H}}\,\widehat{\vec{\sigma}})\psi + e\Phi\psi\,;\ \ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ I

1. Проверить эрмитовость основных операторов (координаты, импульса, момента импульса, энергии).

2. Для операторов инверсии

$$\widehat{I}_x|x>=|-x>$$

   и трансляции

$$\widehat{T}_a|x>=|x+a>$$

   найти операторы эрмитово сопряженные и обратные.

3. Доказать соотношения (условия полноты):

$$\sum_n |n\rangle\langle n\,| = 1\;;\quad \int |\lambda\rangle\langle\lambda| d\lambda = 1.$$

4. Доказать

$$(\widehat{A}\widehat{B})^+ = \widehat{B}^+\widehat{A}^+.$$

   Показать, что оператор $\widehat{N} = \widehat{A}^+\widehat{A}$ эрмитов (при любом $\widehat{A}$) и что $<\widehat{N}>\geq 0$.

5. Получить оператор координаты в импульсном представлении и оператор импульса в координатном представлении.

6. Найти

$$< \vec{r}|U(\vec{r})|\vec{r}\,' > , \; < \vec{r}|\widehat{\vec{p}}^{\,2}|\vec{r}\,' > , \; < \vec{r}|\widehat{T}_{\vec{a}}|\vec{r}\,' > , \; < \vec{p}|\widehat{\vec{r}}|\vec{p}\,' > \; .$$

7. Найти:
   а) собственные значения и собственные функции оператора инверсии $\widehat{I}_x$;
   б) собственные значения и собственные функции оператора трансляции $\widehat{T}_a$.

8. Доказать справедливость соотношения

$$[\widehat{A}\widehat{B},\widehat{C}] = \widehat{A}[\widehat{B},\widehat{C}] + [\widehat{A},\widehat{C}]\widehat{B} \, .$$

9. Коммутатор двух эрмитовых операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ равен $[\widehat{A}\widehat{B}] = i\widehat{C}$, где $\widehat{C}$ — эрмитов. Доказать соотношение неопределенностей

$$< (\widehat{A} - \overline{A})^2 >< (\widehat{B} - \overline{B})^2 > \geq < \widehat{C} >^2 /4 \, .$$

10. Раскрыть коммутаторы:

$$[\widehat{T}_a, \widehat{x}] \, , \; [\widehat{T}_a, \widehat{p}_x] \, .$$

11. Раскрыть коммутаторы:

$$[\widehat{p}_\alpha, f(r)] \, , \; [\widehat{x}, exp(\frac{i}{\hbar} a\widehat{p}_x)] \, , \; [\widehat{p}_x^2, f(r)] \, , \; r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, .$$

12. Найти уровни энергии и собственные функции частицы в потенциальном ящике:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \; 0 < x < a \, , \\ \infty & , \; x < 0 \, , x > a \, . \end{cases}$$

Найти $< \widehat{x}^{\,2} >$ и $< \Delta x^{\,2} >$ для n–го состояния.

13. Найти уровни энергии и собственные функции частиц:
а) в потенциальной яме вида

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , \ |x| < a \, , \\ 0 & , \ |x| > a \, ; \end{cases}$$

б) в потенциальной яме вида

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \ x < 0 \, , \\ -V_0 & , \ 0 < x < a \, , \\ 0 & , \ x > a \, . \end{cases}$$

Указать условие существования дискретного уровня энергии в такой яме.

ЗАДАНИЕ II

1. Вычислить $[\widehat{a} \, f(\widehat{a}^{+})]$, если $[\widehat{a} \, \widehat{a}^{+}] = 1$.
2. Найти явный вид оператора $exp(i\varphi \widehat{I}_x)$.
3. Чему равен оператор

$$e^{-i\hat{\vec{p}}\vec{a}/\hbar} U(r) e^{i\hat{\vec{p}}\vec{a}/\hbar} \, ,$$

$\vec{a}$ — постоянный вектор.

4. Получить разложение

$$e^{\xi \widehat{A}} \widehat{B} e^{-\xi \widehat{A}} = \widehat{B} + \xi [\widehat{A} \widehat{B}] + \frac{1}{2!} \xi^2 [\widehat{A} [\widehat{A} \widehat{B}]] + \ldots$$

5. Показать, что оператор вида $\widehat{U} = exp(i\widehat{F})$ является унитарным, если $\widehat{F}$ — эрмитов оператор.

6. Показать, что если $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ — коммутирующие друг с другом эрмитовы операторы, то оператор

$$\widehat{U} = \frac{\widehat{A} + i\widehat{B}}{\widehat{A} - i\widehat{B}}$$

является унитарным. Представить в указанном виде унитарный оператор
$\widehat{U} = exp(i\widehat{F})$.

7. Найти детерминант унитарной матрицы вида $exp(i\widehat{F})$, где $\widehat{F}$ — эрмитова матрица.

8. Найти собственное значение энергии и собственную функцию связанного состояния частицы в поле

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\kappa_o\delta(x)\,.$$

Найти $< \widehat{x}^2 >$, $< \Delta x^2 >$, $< \widehat{p}^2 >$, $< \Delta p^2 >$, проверить, выполняется ли соотношение неопределенностей.

Найти "вероятность ионизации"при внезапном изменении параметра ямы от κ_o до κ_1.

Найти коэффициент отражения и прохождения в этом поле.

9. Найти уровни энергии и собственные функции связанных состояний частицы в поле

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\kappa_0[\delta(x+a) + \delta(x-a)]\,.$$

Особо рассмотреть случай $\kappa_0 a \gg 1$.

10. В потенциале предыдущей задачи (при $\kappa_0 a \gg 1$) частица в начальный момент времени $t = 0$ находится в левой яме. Найти вероятность нахождения частицы в правой яме в момент времени t.

11. Найти разрешеные зоны энергии для частицы, движущейся в периодическом поле вида

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\kappa_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)\,.$$

Рассмотреть предельные случаи:
а) $\kappa_0 a \gg 1$. Особо рассмотреть первую разрешенную зону.
б) $\kappa_0 a \ll 1$.

ЗАДАНИЕ III

1. Раскрыть коммутаторы:

$$[\widehat{L}_i, \widehat{x}_k]\,,\ [\widehat{L}_i, \widehat{p}_k]\,,\ [\widehat{L}_i, \widehat{L}_k]\,,\ [\widehat{L}_i, f(r)]\,,\ [\widehat{L}_i, \widehat{p}_k\widehat{p}_l]\,,$$

$$[\widehat{L}_i, \widehat{\vec{r}}^{\,2}]\,,\ [\widehat{L}_i, \widehat{\vec{p}}^{\,2}]\,,\ [\widehat{L}_i, (\widehat{\vec{p}\vec{r}})]\,,\ [\widehat{L}_i, (\widehat{\vec{p}\vec{r}})\widehat{p}_k]\,,$$

$$[\widehat{L}_z, \widehat{L}_\pm]\,,\ [\widehat{L}_+, \widehat{L}_-]\,,\ [\widehat{L}_i, f(\rho)]\,,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

2. Показать, что в состоянии $|lm>$ (определена проекция на ось z) выполняются соотношения:

   а) $< \hat{l}_x > = < \hat{l}_y > = 0\,,$
   б) $< \hat{l}_x \hat{l}_y > = - < \hat{l}_y \hat{l}_x > = im/2\,,$
   в) $< \hat{l}_x^2 > = < \hat{l}_y^2 > = < \Delta \hat{l}_x^2 > = \frac{1}{2}[l(l+1) - m^2]\,.$

3. Найти вид операторов $\widehat{r^{-1}}$ и $\widehat{r^{-2}}$ в импульсном представлении.

4. Эрмитов оператор $\widehat{f}(\lambda)$ с дискретным спектром зависит от некоторого параметра λ. Доказать соотношение

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle n \left| \frac{\partial \widehat{f}(\lambda)}{\partial \lambda} \right| n \right\rangle .$$

5. Записать уравнение Шредингера для двух частиц с массами m_1 и m_2, взаимодействующих по закону $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ в системе центра масс.

   Какой вид имеет волновая функция $\psi(\vec{r}_1\,, \vec{r}_2)$?

6. Определить дискретный спектр энергии частицы с моментом $l = 0$, находящейся в центрально – симметричной потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} -U_o\,, & r < a\,, \\ 0\,, & r > a\,. \end{cases}$$

   Сравнить со случаем 2 – мерной ямы.

7. Найти среднее значение операторов r^2, $\frac{1}{r}$, $\widehat{\vec{p}}^{\,2}$ и амплитуду Фурье $c(\vec{p})$ для основного состояния атома водорода.

   С помощью формулы $\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle_n$ получить $< \frac{1}{r} >$ и $< \frac{1}{r^2} >$ в произвольном состоянии атома водорода.

8. Найти уровни энергии трехмерного изотропного осциллятора и кратность их вырождения, разделяя переменные:

   а) в декартовых координатах;

   б) в сферических координатах.

9. Найти приближенное значение энергии основного состояния гармонического осциллятора вариационным методом, используя пробные функции вида:

) $\psi(x) = A(1 + x^2/a^2)^{-1}$;) $\psi(x) = B(1 + x^2/a^2)^{-2}$;

где a — вариационный параметр. Сравнить с точным значением.

ЗАДАНИЕ IV

1. Найти генераторы трансляции для заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях. Найти коммутационные соотношения между ними.

2. Найти унитарный оператор, соответствующий преобразованию Галилея.

3. Найти для осциллятора операторы $\widehat{a}$ и $\widehat{a}^{+}$ в представлении Гайзенберга.

4. Найти операторы $\widehat{x}$ и $\widehat{p}_x$ в представлении Гайзенберга для
а) свободной частицы;
б) частицы в однородном поле $V(x) = -F_0 x$;
в) линейного гармонического осциллятора.

5. Бесспиновая частица с зарядом e и массой m заключена в ящик большого объема V и находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathcal{H}$. Найти ее уровни энергии и кратность их вырождения.

6. Найти функцию Грина $G_E(x, x')$ уравнения Шредингера для свободной частицы при $E < 0$, убывающую при $|x - x'| \to \infty$. Функция Грина удовлетворяет уравнению
$$(\widehat{H} - E)G_E \equiv (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - E)G_E = \delta(x - x')\,.$$
С помощью функции Грина записать уравнение Шредингера для состояний дискретного спектра в поле $U(x)$ ($U(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$) в виде интегрального уравнения.

7. Найти функции Грина $G_E^{(\pm)}(x,x')$ уравнения Шредингера для свободной частицы при $E>0$. Индексы $(\pm)$ означают, что функции Грина имеют асимптотику

$$G_E^{(\pm)}(x,x') \propto exp\left(\pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}|x-x'|\right)$$

при $|x-x'|\to\infty$.

Представить уравнение Шредингера в виде интегрального уравнения, решения которого описывают процесс отражения и прохождения частиц с импульсом p в поле $U(x)$ ($U(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$).

8. Для частицы, находящейся в однородном поле $V(x) = -F_0 x$, найти временную функцию Грина в координатном представлении.

Рассмотреть расплывание волнового пакета, имеющего при $t=0$ вид

$$\Psi(x,t=0) = Aexp\left[\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right].$$

Сравнить временную эволюцию средних значений $< x >$ и $< p >$ с классической фазовой траекторией частицы $(x_{cl}(t),\, p_{cl}(t))$.

9. Найти когерентное состояние гармонического осциллятора $|z>$ как собственный вектор оператора уничтожения

$$\widehat{a}|z> = z|z>,$$

где $z=(q+ip)/\sqrt{2}$ – комплексное собственное значение оператора $\widehat{a}$.

Какова вероятность в состоянии $|z>$ найти собственное состояние осциллятора $|n>$?

10. Найти временную зависимость вектора когерентного состояния $|z(t)>$ для гармонического осциллятора.

    Показать, что для когерентного состояния средние значения операторов координаты и имрульса совпадают с классическим решением уравнения движения осциллятора

$$< z(t)|\widehat{Q}|z(t) >= q_{cl}(t)\,,$$
$$< z(t)|\widehat{\mathcal{P}}|z(t) >= p_{cl}(t)\,.$$

    Убедится, что когерентное состояние минимизирует соотношение неопределенности $(\Delta p\, \Delta q = \hbar/2)$.

ЗАДАНИЕ V

1. Найти собственные значения и собственные функции спиновых операторов:

$$\text{а)}\quad \widehat{\sigma}_x\,,\ \widehat{\sigma}_y\,,\ \widehat{\sigma}_z\,;$$
$$\text{б)}\quad \widehat{\sigma}_n = (\widehat{\vec{\sigma}}\,\vec{n}_0)\,,$$

   где $\vec{n}_0$ – единичный вектор с составляющими $(\sin\theta_0\,\cos\varphi_0\,,\,\sin\theta_0\,\sin\varphi_0\,,\,\cos\theta_0)$.

2. Доказать соотношения:

$$\text{а)}\quad \widehat{\sigma}_j\,\widehat{\sigma}_k = \delta_{jk}\,\hat{1} + i\,\varepsilon_{jkl}\,\widehat{\sigma}_l\,,$$
$$\text{б)}\quad (\widehat{\vec{\sigma}}\,\vec{A})\,(\widehat{\vec{\sigma}}\,\vec{B}) = (\vec{A}\,\vec{B}) + i\,(\widehat{\vec{\sigma}}\,[\vec{A}\,\vec{B}])\,,$$

   где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – обычные (не спиновые) векторные операторы.

3. Для системы из двух частиц со спином $s = 1/2$ найти проекционные операторы $\widehat{P}_{SS_z}$ на состояния с определенным значением суммарного спина S и его проекции S_z на ось z.

4. Найти собственные функции и собственные значения оператора
$$\widehat{V} = a\,(\widehat{\sigma}_{1z} + \widehat{\sigma}_{2z}) + b\,(\widehat{\vec{\sigma}}_1\,\widehat{\vec{\sigma}}_2)\,.$$
Параметры $a\,, b$ — вещественны, так что оператор $\widehat{V}$ — эрмитов.

5. Электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z, равной 1/2. Какова вероятность различных значений, которые может принимать проекция спина на ось $\vec{n}_0$? Найти явный вид оператора преобразования спинора при повороте системы координат, при которой ось z совмещается с направлением $\vec{n}_0$.

6. Записать спиновые матрицы $\widehat{S}_x$, $\widehat{S}_y$, $\widehat{S}_z$ для частицы со спином 1 в базисе состояний с определенной проекцией спина на ось z.

7. Для двух частиц со спином $s = 1/2$ найти собственные функции Ψ_{SS_z} операторов квадрата суммарного спина и проекции суммарного спина на ось z одним из следующих способов:

   а) непосредсвенно из уравнения на собсвенные функции оператора $\widehat{\vec{S}}^{\,2}$;

   б) воспользовавшись операторами $\widehat{S}_{\pm}$;

   в) основываясь на свойствах симметрии волновой функции состояния с определенным суммарным спином к перестановке спиновых переменных обеих частиц.

8. Для заряженной частицы со спином $s = 1/2$ найти среднее значение вектора магнитного момента в состояниях $|jlm>$. Оператор магнитного момента $\widehat{\vec{\mu}}$ имеет вид
$$\widehat{\vec{\mu}} = \mu_0\,\widehat{\vec{\sigma}} + \frac{e\hbar}{2mc}\,\widehat{\vec{l}},$$

где μ_0 — спиновый магнитный момент частицы (для электрона $\mu_e = -e_0\hbar/2m_e c$, для протона $\mu_p = 2.79 e_0\hbar/2m_p c$ и т.д., e_0 — величина заряда электрона), e — заряд частицы.

9. Найти зависимость от времени спиновой функции покоящегося μ–мезона, если в начальный момент $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и включается магнитное поле $\mathcal{H}$, направленное вдоль оси x. Найти также $\langle\widehat{\sigma}_x\rangle$, $\langle\widehat{\sigma}_y\rangle$, $\langle\widehat{\sigma}_z\rangle$. Убедиться, что магнитный момент μ – мезона вращается. Получить вид спиновых операторов в представлении Гейзенберга.
Чему равна вероятность иметь в момент t проекцию на ось z, равную -1/2 ?

ЗАДАНИЕ VI

1. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии и нормированные собственные функции линейного гармонического осциллятора.

2. Найти в квазиклассическом приближении коэффициент проникновения частиц через потенциальный барьер
$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , \ x < R\,, \\ \frac{2Ze^2}{x} & , \ x > R\,. \end{cases}$$
Получить приближенное выражение для коэффициента проникновения в пределе $R \ll \frac{2Ze^2}{E}$. Получить закон Гейгера–Неттола в элементарной теории α–распада.

3. Найти с помощью теории возмущений поправки к уровням энергии линейного гармонического осциллятора, возмущенного полем вида

а) $\widehat{V} = \alpha x\,;$
б) $\widehat{V} = Ax^3 + Bx^4\,.$

4. Найти смещение уровня энергии основного состояния атома водорода под влиянием конечного размера ядра. Ядро считать равномерно заряженным по объему шаром радиуса R.

5. Найти расщепление в однородном электрическом поле уровня энергии атома водорода с $n = 2$ (эффект Штарка).

   Найти правильные волновые функции нулевого приближения.

6. На покоящийся мюон, находящийся в постоянном однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}} \parallel z$, падает вращающееся радиочастотное поле $\vec{h}(t) \perp \vec{\mathcal{H}}$

$$\vec{h}(t) = (h_1 \cos\omega t\,,\ h_2 \sin\omega t\,,\ 0)\,.$$

   Найти зависимость от времени спиновой функции $\chi(t)$, если в начальный момент $\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Чему равна поляризация спина $\vec{\mathcal{P}}(t) = \langle\chi(t)|\widehat{\vec{\sigma}}|\chi(t)\rangle$?

7. Найти вероятность перехода частицы, находящейся в связанном состоянии в поле δ – ямы, в непрерывный спектр под влиянием внешнего поля вида $\widehat{V} = \widehat{F}x\cos\omega t$ в случае $\hbar\omega > \frac{\hbar^2\kappa_0^2}{2m}$.