МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А.Самарский
____ мая 2010 г.

ПРОГРАММА

по курсу: АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
по направлению: 511600
факультет: ФНБИК
кафедра: физики и физического материаловедения
курс: 2
семестр: 3
лекции: 34 часа
практические (семинарские) занятия: 34 часа
лабораторные занятия: нет
самостоятельная работа: 2 часа в неделю
экзамен: 3 семестр
зачет: нет
ВСЕГО ЧАСОВ: 68

Программу и задание составил:
д.ф.-м.н. Зверев Михаил Валентинович

Программа утверждена на заседании кафедры физики и физического материаловедения ____ мая 2010 года

Заведующий кафедрой В.Г. Вакс

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. Связи и их классификация. Возможные и виртуальные перемещения. Модель идеальных связей. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода. Обобщенные координаты. Обобщённые силы. Уравнения Лагранжа второго рода. Лагранжиан. Кинетическая энергия в обобщенных координатах. ([1], § 1.1–1.4) и (или) ([2], § 1–6)

2. Потенциальная энергия. Сохранение полной энергии. Непотенциальные силы. ([2], § 7,8) Законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения как следствие однородности времени, пространства и изотропности пространства. Механическое подобие. ([3], § 6,7,9,10)

3. Одномерное движение и интегрирование уравнений движения. Приведенная масса. Движение в центральном поле. Кеплерова задача. ([3], § 11,13–15)

4. Рассеяние частиц. Сечение рассеяния. Формула Резерфорда. Рассеяние под малыми углами. ([3], § 17–19)

5. Равновесие. Устойчивость и неустойчивость. ([4], § 22) Линеаризация и малые колебания. Динамика консервативных и диссипативных систем вблизи равновесия. Собственные частоты для систем со многими степенями свободы. ([3], § 21–23,25) Вынужденные колебания и резонанс. ([3], § 26)

6. Движение твёрдого тела: угловая скорость вращения, тензор инерции, момент импульса твердого тела. Свободное вращение симметрического волчка. Уравнения движения твердого тела. ([3], § 31–34)

7. Углы Эйлера. Симметрический волчок с закрепленной нижней точкой в поле тяжести. Спящий волчок и быстрый волчок. ([3], § 36), ([4], § 30,31), ([5], гл. V § 4–7)

8. Принцип наименьшего действия Гамильтона. Уравнения Лагранжа второго рода как следствие вариационного принципа. ([4], § 12,13) Преобразование Лежандра. ([4], § 14) Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Цикличе-

ские переменные. ([4],§ 15) Вид функций Лагранжа и Гамильтона для частиц в магнитном поле.

9. Действие как функция координат и времени. ([3], § 43) Фазовое пространство, фазовая скорость, фазовый поток. Теорема Лиувилля. Теорема Пуанкаре о возвращении. ([4], § 16)

10. Расширенное фазовое пространство. Вариационный принцип в расширенном фазовом пространстве. ([4], § 45 В) Лемма Стокса. Интегральные кривые уравнения Гамильтона как линии ротора 1-формы $p\,dq - H\,dt$. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана. ([4], § 44)

11. Определение канонического отображения. ([4], § 44 Д, 16 А) Канонические преобразования. ([4], § 45 А) Производящие функции канонического преобразования. Бесконечно малые канонические преобразования. ([4], § 48 А)

12. Критерии каноничности преобразования. Скобки Лагранжа. Скобки Пуассона. Свойства скобок Пуассона. Теорема Пуассона. ([3], § 42)

13. Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Гамильтона-Якоби. Разделение переменных. Укороченное действие. ([3], § 47,48)

14. Разделение переменных в сферических, параболических и эллиптических координатах. Движение частицы в поле двух притягивающих центров. ([3], § 48), ([4], § 47 В)

15. Понижение порядка системы канонических уравнений с помощью интеграла энергии. ([4], § 45 Б) Принцип наименьшего действия Мопертюи – Лагранжа. ([4], § 45 Г) Оптико-механическая аналогия. [4], § 46 А,Б)

16. Переменные действие-угол в одномерном случае. ([4], § 50 Б) Адиабатический инвариант. ([4], § 50 Д,Е,В)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Голдстейн, ”Классическая механика”, Москва, ГИТТЛ, 1957.

2. Ф. Р. Гантмахер, ”Лекции по аналитической механике”, Москва, ”Наука”, 1966.

3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ”Механика”, М.: Наука, 1973.

4. В. И. Арнольд, ”Математические методы классической механики”, М.: Наука, 1979.

5. Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко, ”Сборник задач по аналитической механике”, М.: Наука, 1996.

Дополнительная литература

1. М. А. Айзерман, ”Классическая механика”, М.: Наука, 1974.

2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ”Теория поля”, М.: Наука, 1988.

3. Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, ”Сборник задач по классической механике”, М.: Наука, 1969.

4. А. И. Алексеев, ”Техника вычислений в классической механике”, МИФИ, 1980, Учебное пособие.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ. (Все номера задач из [5]).

ЗАДАНИЕ 1

I. Связи и независимые координаты. Уравнения Лагранжа I и II рода.

12.6, 12.10, 12.86.

I.1. Две точки с одинаковой массой m соединены стержнем неизменной длины l с пренебрежимо малой массой. Система может двигаться только в вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Найти траектории точек из уравнений Лагранжа первого рода.

12.29, 12.31, 12.36.

II. Интегрирование одномерных уравнений движения. Сечение рассеяния.

II.1. Определить, по какому закону $T(\varepsilon)$ обращается в бесконечность период движения частицы массы m в потенциальной яме, изображённой на рис. 1, при приближении энергии E к U_m ($\varepsilon = 1 - E/U_m \to +0$). Считать, что в окрестности точки $x = a$: $U(x) = U_m - \alpha(x-a)^n$, где n — четное, $n \geq 2$.

II.2. Определить закон $T(\varepsilon)$ обращения в бесконечность периода движения частицы массы m в потенциале $U(x)$ (рис. 2), при условии $\varepsilon = (E - U_m)/(U_m - U_{min}) \to +0$. Форму $U(x)$ в окрестности точки $x = a$ считать такой же, как в задаче II.1.

II.3. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц сферическим "потенциальным горбом"

$$U(r) = \begin{cases} V > 0\,, & r < a \\ 0\,, & r > a \end{cases}$$

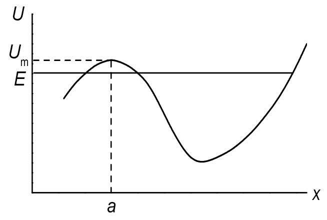

Рис.1

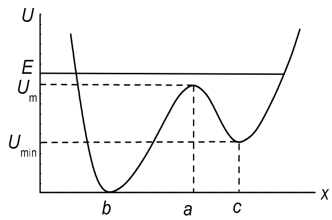

Рис.2

II.4. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния быстрых частиц ($E \gg V$) в потенциале

$$U(r) = \begin{cases} V(1 - r^2/R^2)\,, & r < a \\ 0\,, \quad r > a \end{cases}$$

III. Малые колебания.

16.19, 16.64, 16.88, 16.111. 18.4.

III.1. Определить энергию E, приобретённую осциллятором под действием силы $F(t) = F\exp(-t^2/\tau^2)$ за всё время её действия, если при $t = -\infty$ осцилятор покоился.

III.2. Определить положения устойчивого равновесия маятника, точка подвеса которого совершает колебания с частотой γ ($\gamma \gg \sqrt{g/l}$).
Колебания точки подвеса: а) вертикальные, б) горизонтальные.

IV. Вращение твёрдого тела.

11.8 (2, 5, 8), 11.15, 11.59, 11.79.

ЗАДАНИЕ 2

V. Вариационная формулировка уравнений движения.

21.12.

VI. Уравнения Гамильтона.

VI.1. Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона равна

$$H(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} - \mathbf{pa} \quad (\mathbf{a} = \mathrm{const}).$$

19.19, 19.31, 19.35

VI.2. Вычислить скобки Пуассона:

а) $\{M_i, r_j\}, \quad \{M_i, p_j\}, \quad \{M_i, M_j\}$
б) $\{\mathbf{ap}, \mathbf{br}\}, \quad \{\mathbf{aM}, \mathbf{br}\}, \quad \{\mathbf{aM}, \mathbf{bM}\}$
в) $\{\mathbf{M}, \mathbf{rp}\}, \quad \{\mathbf{p}, r^n\}, \quad \{\mathbf{p}, (\mathbf{ar})^{\mathbf{2}}\}$

VII. Интегральные инварианты.

22.1, 22.31.

VIII. Канонические преобразования.

VIII.1. Функция Гамильтона гармонического осциллятора имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2\,,$$

где m и ω – масса и частота колеблющейся частицы. Написать функцию Гамильтона H' и уравнения Гамильтона в новых канонически сопряжённых переменных Q и P, взяв в качестве производящей функции следующие выражения:

а) $F(q,Q) = \dfrac{1}{2}m\omega q^2 \operatorname{ctg} Q\,;$

б) $G(q,P) = -\dfrac{m\omega q^2}{2P}\,;$

в) $\Phi(p,P) = \dfrac{p^2}{2m\omega\cos P}\,.$

VIII.2. Рассматриваются малые колебания ангармонического осциллятора, функция Гамильтона которого

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \alpha q^3 + \beta q p^2$$

и $\alpha q \ll m\omega^2$, $\beta q \ll 1/m$. В каноническом преобразовании, задаваемом производящей функцией $\Phi = qP + aq^2P + bP^3$, подобрать параметры a и b так, чтобы новая функция Гамильтона с точностью до членов первого порядка по $\alpha Q/(m\omega^2)$ и $\beta m Q$ включительно не содержала ангармонических членов, и найти $q(t)$.

VIII.3. Найти производящую функцию канонического преобразования, состоящего в переходе от $q(t)$, $p(t)$ к $Q(t) = q(t+\tau)$ $P(t) = p(t+\tau)$, где τ=const, для

а) свободного движения,

б) движения в однородном поле,

в) осциллятора.

IX. Уравнение Гамильтона-Якоби.

24.8, 24.104.

IX.1. Постоянные однородные электрическое **E** и магнитное **H** поля взаимно ортогональны. Выбирая электромагнитные потенциалы **A** и ϕ данных скрещенных полей в виде

$A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ и $\phi = -Ex$ найти полный интеграл уравнения уравнения Гамильтона – Якоби для частицы с массой m и зарядом e.

IX.2 Диполь с моментом $\mathbf{d}$ создает в пространстве электрическое поле с потенциалом $\phi = \mathbf{dr}/r^3$. В электрическом поле рассеивается протон с массой m и зарядом e. До рассеяния протон двигался с прицельным расстоянием ρ и имел скорость $\mathbf{v}$, антипараллельную вектору $\mathbf{d}$. Выразить траекторию протон через квадратуры. В случае далёких пролетов протона с большой энергией E определить траекторию в аналитическом виде путем разложения в ряд по малому параметру $ed/E\rho^2$.

IX.3. Найти траекторию движения (выразить через квадратуры) в поле двух кулоновских центров $U(r) = \alpha(1/r_1 - 1/r_2)$, находящихся друг от друга на расстоянии $2c$, если скорость частицы на бесконечности параллельна оси, проходящей через кулоновские центры.

ЗАДАНИЕ 3

X. Оптико-механическая аналогия.

21.35, 21.36.

XI. Переменные действие – угол.

XI.1. Найти переменные действие – угол для частицы в поле

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ Fx, & x > 0 \end{cases}$$

24.109, 24.110.

XI.2. Найти переменные действие – угол и частоты малых колебаний двух маятников, соединённых пружиной, длина которой l равна расстоянию между маятниками. Жёсткость пружины k.

XII. Адиабатические инварианты.

XII.1. Как изменяется энергия частицы в поле $U(x)$ при медленном изменении параметров поля?

а) $U(x) = -U_0/\operatorname{ch}^2 \alpha x$, б) $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$.

XII.2. Частица с массой m и зарядом e движется в магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2.

Срок сдачи 1-го задания: 11.10 – 16.10 2010 года.

Срок сдачи 2-го задания: 22.11 – 27.11 2010 года.

Срок сдачи 3-го задания: 13.12 – 18.12 2010 года.